Équations cartésiennes d'un plan dans $\mathbb{R}^3$

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par le point $A(a_1; a_2; a_3)$ et admettant $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ pour vecteurs directeurs. Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan.

A) Le plan $\mathcal{P}$ peut être décrit par un système d'équations paramétriques de paramètres λ et ν :

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{v} + \nu\vec{w} \text{ avec } \lambda, \nu \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 - \nu w_1 \\ \lambda v_2 - \nu w_2 \\ \lambda v_3 - \nu w_3 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \nu \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 - \nu w_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 - \nu w_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 - \nu w_3 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \nu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En résolvant le sous-système $\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 - \nu w_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 - \nu w_2 \end{cases}$ en λ et ν et en les substituant dans la dernière équation, nous obtenons une équation cartésienne du plan. Cependant il existe des outils plus performant pour parvenir à une équation de ce type.

B) Équation cartésienne du plan donné un de ses point et deux de ses vecteurs directeurs supposés non-colinéaires.

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires} \\ &\Leftrightarrow \quad det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - a_1 & v_1 & w_1 \\ y - a_2 & v_2 & w_2 \\ z - a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad ax + by + cz + d = 0 \text{ avec} \\ &\qquad a = v_2w_3 - v_3w_2, \\ &\qquad b = v_3w_1 - v_1w_3, \\ &\qquad c = v_2w_3 - v_3w_2 \text{ et} \\ &\qquad d = a_1(v_3w_2 - v_2w_3) + a_2(v_1w_3 - v_3w_1) + a_3(v_3w_2 - v_2w_3) \end{aligned}$$

C) Équation cartésienne du plan donné un de ses point et un de ses vecteurs normaux.

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix} \bullet \vec{n} = 0 \end{aligned}$$