Distance entre un point et une droite dans $\mathbb{R}^2$

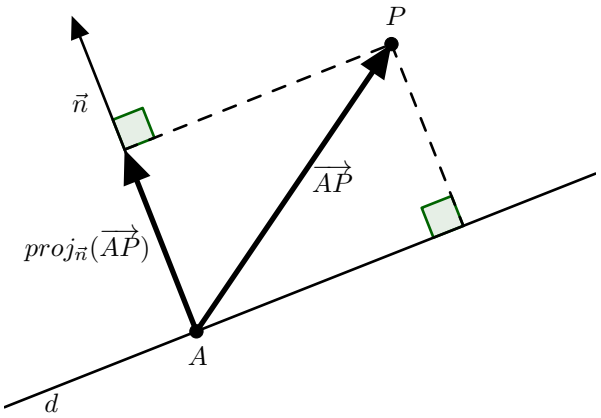
Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème Soit $P(x_P, y_P)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et $d : ax + by + c = 0$ une droite de $\mathbb{R}^2$ passant par le point $A(x_A, y_A)$.

Si $\delta(P; d)$ représente la distance du point P à la droite d

Alors $\delta(P; d) = \dfrac{|\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP}|}{||\vec{n}||} = \dfrac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ où $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de d.

Illustration du théorème :



Démonstration : Nous savons que le vecteur $\overrightarrow{AP}$ projeté orthogonalement sur le vecteur $\vec{n}$ a pour expression $proj_{\vec{n}}(\overrightarrow{AP}) = \dfrac{\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP}}{||\vec{n}||^2}\,\vec{n}$.

La distance $\delta(P; d)$ est donc égale à la norme de ce vecteur :

$$\begin{aligned}
\left|\left| proj_{\vec{n}}(\overrightarrow{AP}) \right|\right| &= \left|\left| \frac{\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP}}{||\vec{n}||^2}\,\vec{n} \right|\right| \\
&= \left| \frac{\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP}}{||\vec{n}||^2} \right| ||\vec{n}|| \quad \text{en vertu de la propriété } ||\lambda\vec{v}|| = |\lambda|\,||\vec{v}|| \\
&= \frac{|\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP}|}{||\vec{n}||^2}\,||\vec{n}|| \\
&= \frac{|\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP}|}{||\vec{n}||} \qquad \text{et donc } \delta(P; d) = \frac{|\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP}|}{||\vec{n}||}
\end{aligned}$$

En terme de composantes, cette formule fournit

$$
\begin{aligned}
\delta(P;d) &= \frac{|\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP}|}{||\vec{n}||} \\
&= \frac{\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_P - x_A \\ y_P - y_A \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \frac{|ax_P + by_P - ax_A - by_A|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} && \text{puisque } A \in d \Leftrightarrow ax_A + by_A + c = 0 \\
& && \text{ou encore } c = -ax_A - by_A
\end{aligned}
$$

□