Déterminant et colinéarité
Approche géométrique

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

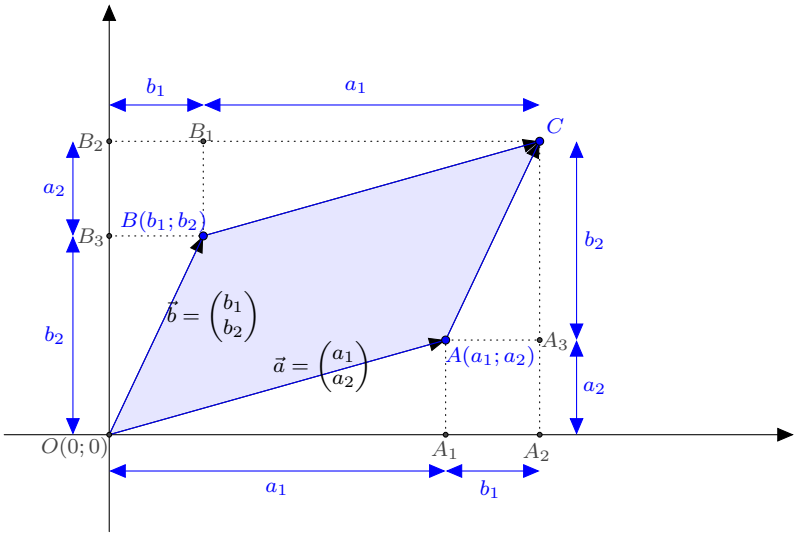
Théorème 1 Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Si $\mathcal{P}$ est le parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$

Alors $\left|\det(\vec{a};\vec{b})\right|$ est l'aire de ce parallélogramme.

Démonstration du théorème 1 :

On démontre le théorème dans le cas de la figure suivante (les points A et B sont dans le même quadrant formant entre eux un angle aigu).



L'aire du parallélogramme $0ACB$ que l'on cherche est l'aire du rectangle OA_2CB_2 moins l'aire des triangles rectangles OAA_1, AA_3C, BB_1C et OBB_3 et moins l'aire des rectangles $AA_1A_2A_3$ et $BB_1B_2B_3$.

Les triangles OAA_1 et BB_1C sont égaux. En effet ils sont semblables ($\angle A_1OA = \angle B_1C_B$ et $\angle OA_1A = \angle CB_1B = 90°$) et $||\vec{a}|| = \left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right|$. Ils ont donc même aire $\frac{1}{2}a_1a_2$ (si on se base sur le triangle OAA_1).

De même on montre que les triangles OBB_3 et CAA_3 sont égaux.et d'aire $\frac{1}{2}b_1b_2$ (si on se base sur le triangle OBB_3).

Les rectangles $AA_1A_2A_3$ et $BB_1B_2B_3$ sont égaux et leur aire vaut $(a_1 + b_1 - a_1)a_2 = b_1a_2$ (si on se base sur le rectangle $AA_1A_2A_3$).

Il suit que l'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme $0ACB$ vaut :

$$\mathcal{A} = (a_1+b_1)(a_2+b_2)-2\frac{1}{2}a_1a_2-2\frac{1}{2}b_1b_2-2b_1a_2 = a_1a_2+a_1b_2+b_1a_2+b_1b_2-a_1a_2-b_1b_2-2b_1a_2 = a_1b_2-a_2b_1$$

qui est précisément le déterminant des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On a donc $\left|\det(\vec{a};\vec{b})\right| = \mathcal{A}$ □

Remarque : La valeur absolue autour du déterminant vient de la généralisation de cette démonstration à deux vecteurs pris de façon quelconque.

Théorème 2 Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

SI $det(\vec{a};\vec{b}) = 0$

ALORS $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.

Démonstration du théorème 2 :
Si le déterminant est de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est nul cela signifie que le parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est dégénéré (les points 0, A et B de la figure du théorème 1 sont alignés), c'est-à-dire que les vecteurs sont colinéaires. □

La réciproque du théorème 2 est aussi vraie.

Théorème 3 Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

SI $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires

ALORS $\det(\vec{a};\vec{b}) = 0$.

Démonstration du théorème 3 :
Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires alors il existe un nombre réel λ tel que $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.
En terme de composantes, si on note $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ on a $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b_1 \\ \lambda b_2 \end{pmatrix}$.
Il suit que $\det(\vec{a};\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda b_1 & b_1 \\ \lambda b_2 & b_2 \end{vmatrix} = \lambda b_1 b_2 - \lambda b_2 b_1 = 0$. □