Déterminant et colinéarité
Approche algébrique

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème 1 Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Si $det(\vec{a};\vec{b}) = 0$

Alors $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.

Rappelons que

1. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel λ pour lequel $\vec{a} = \lambda\vec{b}$
2. tout vecteur est colinéaire au vecteur nul ($\vec{0} = 0\vec{a}$).

Démonstration du théorème 1 : Remarquons que

$$det(\vec{a};\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1.$$

Nous nommerons $\mathcal{R}$ cette dernière relation.

Plusieurs cas sont à traiter dans la démonstration de ce théorème.

Cas $b_1 = 0$: la relation $\mathcal{R}$ s'écrit $a_1b_2 = 0$.

Soit $b_2 \neq 0$.
Alors il suit que $a_1 = 0$, que $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et que $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}$.
En posant $\lambda = \frac{a_2}{b_2}$ nous déduisons que $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Soit $b_2 = 0$.
Dans ce cas $\vec{b}$ est le vecteur nul qui est colinéaire à tout vecteur.

Cas $b_1 \neq 0$: la relation $\mathcal{R}$ s'écrit $\frac{a_1b_2}{b_1} = a_2$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \frac{a_1b_2}{b_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1b_1}{b_1} \\ \frac{a_1b_2}{b_1} \end{pmatrix} = \frac{a_1}{b_1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \lambda\vec{b} \text{ avec } \lambda = \frac{a_1}{b_1}.$$

□

La réciproque du théorème 2 est aussi vraie.

Théorème 2 Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

SI $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires

ALORS $\det(\vec{a};\vec{b}) = 0$.

Démonstration du théorème 2 :

Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires alors il existe un nombre réel λ tel que $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

En terme de composantes, si on note $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ on a $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b_1 \\ \lambda b_2 \end{pmatrix}$.

Il suit que $\det(\vec{a};\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda b_1 & b_1 \\ \lambda b_2 & b_2 \end{vmatrix} = \lambda b_1 b_2 - \lambda b_2 b_1 = 0$. □