Dérivée de x^n lorsque $n \in \mathbb{Q}$

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Nous savons que la formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ est vraie lorsque n est un entier relatif. On démontre que ce résultat peut s'étendre à l'ensemble des nombres rationnels.

Théorème Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

Si f la fonction définie par $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

Alors 1°) f est dérivable sur son domaine et

2°) $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$.

On rappelle que

1. $y = x^{\frac{1}{q}} \Leftrightarrow y^q = x$
2. $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration du théorème dans le cas où $p = 1$: Le premier rappel permet d'affirmer que la fonction définie par $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ est dérivable car elle est la réciproque de fonction définie par $x \mapsto x^q$ dont on sait qu'elle est dérivable. De plus $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)'$ vaut $\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$. En effet,comme $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q = x$ on trouve d'une part que

$$\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)' = (x)' = 1 \quad (*)$$

et comme $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q$ est une fonction composée, on a également que

$$\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)' = q\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{q-1}\left(x^{\frac{1}{q}}\right)' \quad (**)$$

En égalant (*) et (**), on obtient $q\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{q-1}\left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = 1$ ou encore $qx^{1-\frac{1}{q}}\left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = 1$. En isolant la dérivée recherchée dans cette expression il suit que

$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = \frac{1}{q}x^{-(1-\frac{1}{q})} = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$$

On a donc bien $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$ pour $q \in \mathbb{N}^*$. □

Démonstration du théorème dans le cas général : La fonction définie par $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ est dérivable puisqu'elle est la composition des deux fonctions dérivables $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ et $x \mapsto x^p$. Nous avons également, en vertu des résultats précédents

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)' = p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-\frac{1}{q}+\frac{1}{q}-1} = px^{\frac{p}{q}-1}$$

c'est-à-dire $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = px^{\frac{p}{q}-1}$□