Dérivée de x^n lorsque $n \in \mathbb{Z}$

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Nous savons que la formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ est vraie lorsque n est un entier naturel et on admettra qu'elle est également vraie si $n = 0$. On démontre que ce résultat peut s'étendre à l'ensemble des entiers relatifs.

Théorème Soit f la fonction définie par $f(x) = x^n$.

Si $n \in \mathbb{Z}$

Alors 1°) f est dérivable sur son domaine et

2°) $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Démonstration du théorème : Comme l'ensemble $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \{\ldots, -3, -2, -1\} \cup \mathbb{N}$ et que la formule est déjà vraie sur $\mathbb{N}$, il suffit de la démontrer pour des entiers appartenant à $\{\ldots, -3, -2, -1\}$, c'est-à-dire pour des entiers de la forme $-n$ où $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Par définition on a $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$. La fonction $f : x \mapsto x^{-n}$ a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pour domaine. La fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ est n'est jamais nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Donc, la fonction $f : x \mapsto x^{-n}$ est dérivable sur son domaine puisqu'elle est l'inverse d'une fonction dérivable jamais nulle sur le domaine. Il reste à établir que $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$.

$$
\begin{aligned}
(x^{-n})' &= \left(\frac{1}{x^n}\right)' \\
&= -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} && \text{par la formule de dérivation d'une fonction inverse} \\
&= -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} && \text{par le résultat connu sur } \mathbb{N} \\
&= -nx^{n-1}x^{-2n} && \text{par définition des puissances "négatives"} \\
&= -nx^{-n-1}
\end{aligned}
$$

On a donc bien $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$ pour $n \in \{\ldots, -3, -2, -1\}$, et par suite pour $n \in \mathbb{Z}$ tout entier. □