Dérivée de x^n lorsque $n \in \mathbb{N}^*$

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème Soit f la fonction définie par $f(x) = x^n$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$

Alors 1°) f est dérivable et

2°) $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Remarque : Ce théorème se démontre à l'aide du principe de récurrence qui s'énonce ainsi :

Soit $\mathcal{P}$ une propriété qui porte sur les entiers naturels $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

1°) Si cette propriété est vérifiée pour le nombre 1 et

2°) si lorsque cette propriété est vérifiée pour un nombre n alors elle l'est aussi pour son successeur $n + 1$

Alors cette propriété est vérifiée pour tous les entiers naturels.

Cela se formule

1°) Si $\mathcal{P}(1)$ est vraie

2°) et si
si $\mathcal{P}(n)$ est vraie (**hypothèse de récurrence**)
alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Démonstration du théorème : Nous devons montrer que la propriété $\mathcal{P}(n) : (x^n)' = nx^{n-1}$ est vraie pour tout entier naturel.

1. Montrons qu'elle est vraie pour 1. À voir $\mathcal{P}(1) : (x^1)' = 1 \cdot x^0$ est vraie.
   a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x - a}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} 1 = 1$ donc la fonction identité est dérivable et $(x)' = 1$.
   b) $1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$.
   c) Comme les deux résultats coïncident la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

2. Supposons qu'il existe un entier n pour lequel la propriété $\mathcal{P}(n) : (x^n)' = nx^{n-1}$ est vraie (il y a au moins le nombre 1). C'est notre hypothèse de récurrence. Nous devons démontrer que la propriété

$$\mathcal{P}(n+1) : (x^{n+1})' = (n+1)x^{(n+1)-1} = (n+1)x^n$$

est vraie.

$$\begin{aligned}
(x^{n+1})' &= (x^n \cdot x^1)' && \text{par propriété élémentaire des puissances} \\
&= (x^n)'x^1 + x^n(x^1)' && \text{par la règle de dérivation} \\
& && \text{d'un produit de fonctions dérivables} \\
&= nx^{n-1}x^1 + x^n(x^1)' && \text{par application de l'hypothèse de récurrence} \\
&= nx^{n-1}x^1 + x^n \cdot 1 && \text{par le point 1) du raisonnement} \\
&= nx^n + x^n && \text{par propriété élémentaire des puissances} \\
&= (n+1)x^n && \text{après mise en évidence du terme } x^n.
\end{aligned}$$

La relation $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$ étant satisfaite, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

3. Il suit des points 1) et 2) que le principe de récurrence s'applique ici, la formule

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

est donc vraie pour tout n entier naturel. □