Relations entre la variation d'une fonction et le signe de sa dérivée

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème 1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si f est strictement croissante sur I

Alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Démonstration du théorème 1 : Soit $a \in I$.
Comme f est dérivable $f'(a)$ existe, et par définition de la dérivée on a $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Donc la limite existe ce qui signifie en particulier que la limite est égale à sa limite à droite (ou à gauche):

$$f'(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Par construction $x > a$ donc $x - a > 0$, et comme par hypothèse f est croissante alors $f(x) > f(a)$ ou encore $f(x) - f(a) > 0$. Il suit que le rapport

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

En passant à la limite il vient donc que $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ c'est-à-dire $f'(a) \geq 0$.
La même conclusion peut être obtenue indépendamment du choix de a, elle est donc vraie pour tout $a \in I$ ce qui démontre que si f est croissante sur I alors $f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in I$. □

Théorème 2 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$

Alors f est strictement croissante sur I.

Remarque : Ces théorèmes ne sont pas réciproques l'un de l'autre.

Démonstration du théorème 2 : Soit a et $b \in I$ avec $a < b$.
Sur l'intervalle $]a; b[$ la fonction est dérivable puisqu'elle l'est sur I tout entier. De même, puisque f est dérivable sur I, elle est continue sur I et également sur l'intervalle $[a; b]$ contenu dans I. Donc sur l'intervalle $[a; b]$ la fonction f satisfait les hypothèses du théorème des accroissements finis, c'est-à-dire qu'il existe au moins un nombre $c \in]a; b[$ pour lequel $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ce qu'on reformule $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
Par construction $b > a$ donc $b - a > 0$ et par hypothèse $f'(c) > 0$ donc $f(b) - f(a) > 0$.
On a montré que pour un choix arbitraire de deux nombres a et $b \in I$ avec $b > a$ la fonction f satisfait $f(b) > f(a)$. Cette conclusion étant indépendante du choix de a et b, on conclut que pour tout $a < b$ dans I on a $f(a) < f(b)$ c'est-à-dire que la fonction f est strictement croissante. □

Les théorèmes suivants se démontrent comme les précédents:

Théorème 3 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

SI f est strictement décroissante sur I

ALORS $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

Théorème 4 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

SI $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$

ALORS f est strictement décroissante sur I.