Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Définition On dit qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I si et seulement si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Théorème Soit f une fonction définie sur une intervalle I.

Si F et G sont deux primitives de f

Alors F et G diffèrent d'une constante, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $F(x) - G(x) = C$ pour tout $x \in I$.

Rappel : Nous utiliserons le résultat connu suivant : Si la dérivée d'une fonction f est identiquement nulle sur un intervalle I ($f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$) alors la fonction f est constante sur cet intervalle (il existe un nombre $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = C$ pour tout $x \in I$).

Démonstration du théorème :

On s'intéresse à la différence des fonctions F et G. La fonction $F - G$ est dérivable sur I puisque la différence de deux fonctions dérivables est dérivable.
De plus $(F-G)'(x) = F'(x)-G'(x)$. Mais comme F et G sont deux primitives de f la différence $F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
Il suit que, pour tout $x \in I$ $(F - G)'(x) = 0$. Donc la fonction $F - G$ est constante sur I par le résultat énoncé dans le rappel.
Donc il existe un nombre C tel que $(F - G)(x) = C$ ou encore $F(x) - G(x) = C$
c'est-à-dire qu'il existe un C pour lequel $F(x) = G(x) + C$ pour tout $x \in I$. □

Réciproque : La réciproque du théorème
"Si deux fonctions dérivables diffèrent d'une constante, elles sont primitives d'une même fonction."
est également vraie. En effet, si F et G sont dérivables sur I et si $F(x) = G(x) + C$ on a bien $F'(x) = (G(x) + C)' = G'(x) + (C)' = G'(x) + 0 = G'(x)$.