Unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Soit E un espace vectoriel, soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ et $\vec{v}$ des vecteurs de E.

Définition : Un vecteur $\vec{v}$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ si et seulement s'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des nombres réels tels que

$$\vec{w} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n.$$

Définition : Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sont *linéairement indépendants* si et seulement si l'équation

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

(où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres réels) admet une solution unique donnée par $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$.
On dit que les vecteurs sont *linéairement dépendants* sinon.

Définition : Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ *engendrent ou génèrent* l'espace vectoriel E si et seulement si tout vecteur $\vec{v}$ de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

Définition : Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ forment une *base* de l'espace vectoriel E si

1. ils sont linéairement indépendants,
2. ils génèrent l'espace vectoriel E.

Théorème Unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base

Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ et $\vec{v}$ des vecteurs de E.

Si les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ forment une base de E

Alors l'écriture de $\vec{v}$ dans cette base est unique.

Démonstration : Supposons que le vecteur $\vec{v}$ admette deux écritures dans la base donnée :

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \cdots + \alpha_n\vec{v_n} \quad (I)$$

$$\vec{v} = \beta_1\vec{v_1} + \beta_2\vec{v_2} + \cdots + \beta_n\vec{v_n} \quad (II)$$

En soustrayant (II) à (I) nous obtenons

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \ldots(\alpha_n - \beta_n)v_n$$

Puisque les $\vec{v_i}$ sont linéairement indépendants il suit que

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0,\ \alpha_2 - \beta_2 = 0,\ \ldots, \alpha_n - \beta_n = 0$$

ou encore

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \ldots, \alpha_n = \beta_n.$$

□