Théorème de la moyenne

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

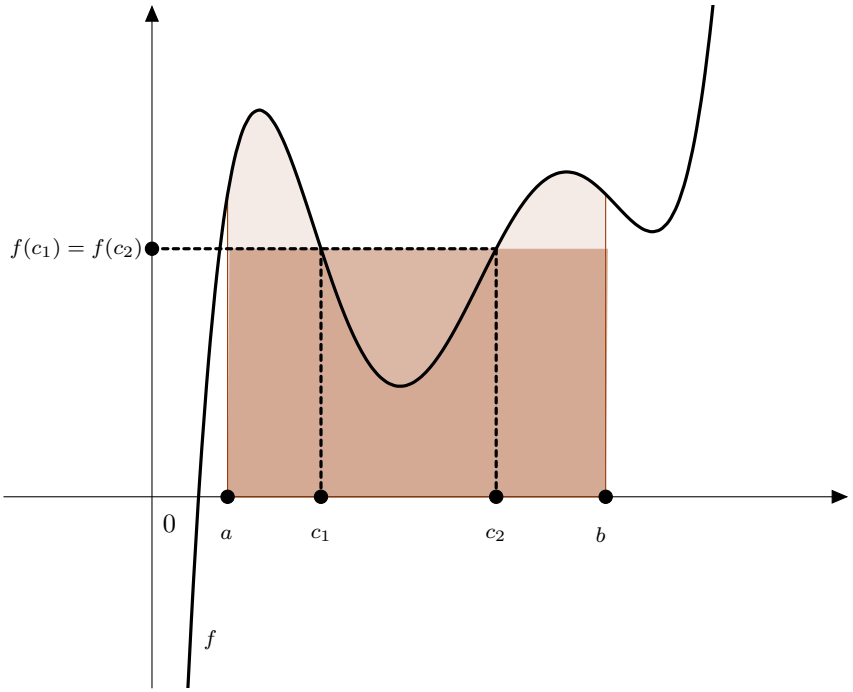
Théorème de la moyenne Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$.

SI f est continue sur $[a;b]$

ALORS il existe au moins un $c \in [a;b]$ pour lequel $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Remarque : Le nom de ce théorème vient de la reformulation de sa conclusion en $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ qui signifie que $f(c)$ est en quelque sorte la moyenne des images de f sur l'intervalle $[a;b]$.

Interprétation géométrique : Intuitivement l'égalité $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ signifie que l'aire de la surface délimitée par le graphe de f, l'axe des x et les verticales passant par a et b est égale à celle d'un rectangle dont la base est l'intervalle $[a;b]$ et la hauteur est une valeur de la fonction dans cet intervalle. Il y en a deux ici, c_1 et c_2.



Démonstration Comme f est continue sur $[a;b]$, cette fonction atteint son maximum global et son minimum global sur cet intervalle, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres m et M tels que pour tout $x \in [a;b]$ on a que

$$m \leq f(x) \leq M.$$

En utilisant la propriété des intégrales qui énonce que si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$, on obtient l'encadrement

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

c'est-à-dire, puisque $\displaystyle\int_a^b m dx$ et $\displaystyle\int_a^b M dx$ sont les aires de rectangles

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

ou encore, après division par $b-a$, $(b-a>0)$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Puisque f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires tout nombre compris entre m et M admet au moins une préimage c dans $[a;b]$. On a donc qu'il existe au moins un $c \in [a;b]$ pour lequel $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. $\square$

