Théorème de Bayes (cas de deux événements incompatibles)

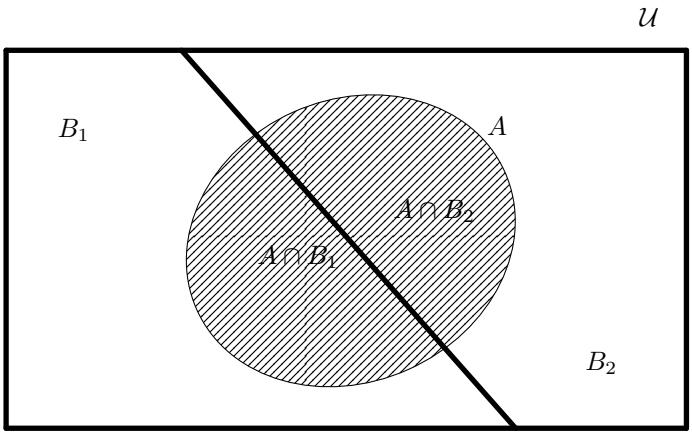
Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème Soient A, B_1 et B_2 trois événements d'un univers $\mathcal{U}$

Si B_1 et B_2 forment une partition de $\mathcal{U}$ *i.e.* $B_1 \cup B_2 = \mathcal{U}$ et $B_1 \cap B_2 = \emptyset$

Alors $$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)} \text{ pour } i = 1, 2.$$

Illustration du théorème :



Remarques : On rappelle que

1. Par définition de la probabilité conditionnelle, on a
   (a) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ou encore $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ et
   (b) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
2. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (axiome de probabilité)

Démonstration : Puisque B_1 et B_2 sont disjoints on peut écrire $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$ avec $(A \cap B_1) \cap (A \cap B_2) = \emptyset$. Il suit que

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)\right) \\ &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) && \text{par la remarque 2)} \\ &= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) && \text{par la remarque 1a)} \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} P(B_i|A) &= \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)} && \text{par la remarque 1a)} \end{aligned}$$

□