Théorème du maximum
et
théorème du minimum

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Définition Soit f une fonction définie sur un certain intervalle I.

f admet un maximum relatif au point d'abscisse x_0 s'il existe un voisinage de x_0 inclus dans I pour lequel pour tout x dans ce voisinage $f(x) \leq f(x_0)$.

f admet un minimum relatif au point d'abscisse x_0 s'il existe un voisinage de x_0 inclus dans I pour lequel pour tout x dans ce voisinage $f(x) \geq f(x_0)$.

Théorème du maximum Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$.

Si f possède un maximum relatif au point d'abscisse $x_0 \in]a;b[$

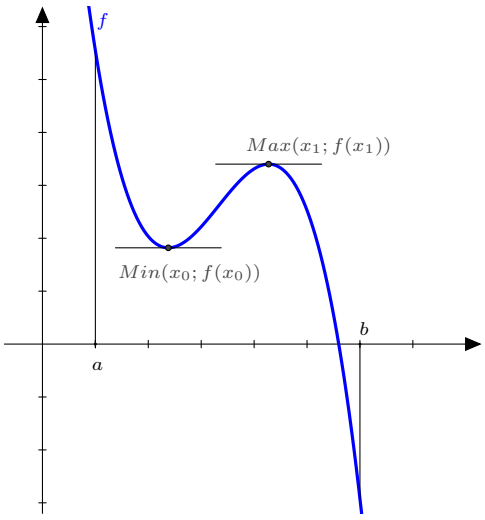
Alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème du minimum Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$.

Si f possède un minimum relatif au point d'abscisse $x_0 \in]a;b[$

Alors $f'(x_0) = 0$.

Illustration des théorèmes : Lorsque le point de tangence est un extremum de la fonction, la tangente en ce point à une pente nulle.



Démonstration du théorème du maximum : On sait par hypothèse que f est dérivable au point x_0, c'est-à-dire que le nombre $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.
On sait d'autre part que si une limite en un point existe, alors les limites à gauche et à droite de ce point existent, sont égales entre elles et égales à la limite, donc

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si la fonction f possède un maximum relatif en x_0, alors dans un voisinage de ce point on doit avoir $f(x) \leq f(x_0)$, c'est-à-dire $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et ceci pour tous les points de ce voisinage.
Si $x < x_0$, c'est-à-dire $x - x_0 < 0$,
$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est positif $\left(\dfrac{\leq 0}{< 0} \geq 0\right)$ et il suit que $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.
Si $x > x_0$, c'est-à-dire $x - x_0 > 0$,
$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est négatif $\left(\dfrac{\leq 0}{> 0} \leq 0\right)$ et il suit que $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.
Mais comme ces deux limites doivent être égales, elles ne peuvent qu'être égales à 0. D'où $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et finalement $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$,
ce qui montre que $f'(x_0) = 0$. □

La réciproque des théorèmes du maximum et du minimum est fausse : Il faut comprendre par "réciproque" que si une fonction dérivable admet un point d'abscisse en lequel la dérivée est nulle, alors ce point n'est pas nécessairement ni un maximum, ni un minimum. En effet, soit f la fonction définie par $f(x) = x^3$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée f' est définie par $f'(x) = 3x^2$. Elle s'annule en $x_0 = 0$ mais pour tout $a > 0$ il existe un $x_1 \in]-a; a[$ et un $x_2 \in]-a; a[$ tels que $f(x_1) < f(x_0)$ (f n'admet pas de maximum en 0 et $f(x_2) > f(x_0)$ (f n'admet pas de minimum en 0). Donc on a $f'(0) = 0$ mais le point $(0, 0)$ n'est ni un maximum, ni un minimum.

