Suites géométriques

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Définition On appelle suite géométrique une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par récurrence par

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } q \in \mathbb{R}^*.$$

Le nombre q est appelé raison de la suite

Propriété 1 Le terme général u_n d'une suite arithmétique est donné par

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

Démonstration de la propriété 1 :

$$\begin{array}{lllllll}
u_1 & & & & & = & u_1 \cdot q^{1-1} \\
u_2 & = & u_1 \cdot q & & & = & u_1 \cdot q^{2-1} \\
u_3 & = & u_2 \cdot q & = & u_1 \cdot q \cdot q & = & u_1 \cdot q^{3-1} \\
u_4 & = & u_3 \cdot q & = & u_1 \cdot q^2 \cdot q & = & u_1 \cdot q^{4-1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
u_n & = & u_{n-1} \cdot q & = & u_1 \cdot q^{n-2} \cdot q & = & u_1 \cdot q^{n-1} \ \square
\end{array}$$

Propriété 2 Une suite géométrique de raison q
converge pour $q \in]-1;1]$
et diverge pour $q \notin]-1;1]$.

Démonstration de la propriété 2 :

Si $q > 1$	alors	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_1 \cdot q^{n-1} = u_1 \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} q^{n-1} = u_1 \cdot (+\infty) = +\infty$	diverge
Si $q = 1$	alors	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_1 = u_1$	converge
Si $q \in]-1;1[$	alors	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_1 \cdot q^{n-1} = u_1 \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} q^{n-1} = u_1 \cdot 0 = 0$	converge
Si $q = -1$	alors	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \{u_1 ; -u_1 ; u_1 ; -u_1 ; \dots\}$	diverge par oscillation
Si $q < -1$	alors	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \{u_1 ; (-u_1)\lvert q\rvert ; u_1 q^2 ; (-u_1)\lvert q\rvert^3 ; \dots\}$	diverge par oscillation

$\square$

Théorème Somme partielle d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de terme général $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ avec $n \geq 1$.

SI $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ALORS son terme général est $s_n = u_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$

Démonstration du théorème :

Comme

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

il suit

$$\begin{aligned} q \cdot s_n &= q \cdot u_1 + q \cdot u_2 + \cdots + q \cdot u_{n-1} + q \cdot u_n \\ &= u_2 + u_3 + \cdots + u_n + q \cdot u_n \end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned} & s_n - q \cdot s_n = u_1 - q \cdot u_n \\ \Leftrightarrow\ & s_n(1-q) = u_1 - q \cdot u_1 \cdot q^{n-1} = u_1(1-q^n) \\ \Leftrightarrow\ & s_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

□

Remarque : Si $q \in]-1;1[$ une série géométrique converge car

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \right) = \frac{u_1}{1-q}.$$

Elle diverge si $q \notin]-1;1[$.