Suites arithmétiques

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Définition On appelle suite arithmétique une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par récurrence par

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } r \in \mathbb{R}.$$

Le nombre r est appelé raison de la suite

Propriété 1 Le terme général u_n d'une suite arithmétique est donné par

$$u_n = u_1 + (n-1)r \quad \forall n \geq 1$$

Démonstration de la propriété 1 :

$$\begin{array}{lllllll} u_1 & & & & & = & u_1 + (1-1)r \\ u_2 & = & u_1 + r & & & = & u_1 + (2-1)r \\ u_3 & = & u_2 + r & = & u_1 + (2-1)r + r & = & u_1 + (3-1)r \\ u_4 & = & u_3 + r & = & u_1 + (3-1)r + r & = & u_1 + (4-1)r \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_n & = & u_{n-1} + r & = & u_1 + ((n-1)-1)r + r & = & u_1 + (n-1)r \end{array} \quad \square$$

Propriété 2 Une suite arithmétique de raison non nulle diverge.

Démonstration de la propriété 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_1 + (n-1)r = u_1 + r \cdot (+\infty) = +\infty \quad \square$$

Théorème Somme partielle d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de terme général $u_n = u_1 + (n-1)r$ avec $n \geq 1$.

Si $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de (u_n)

Alors son terme général est $s_n = \dfrac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$

Démonstration du théorème :

Remarquons que $\forall 1 \leq j \leq n \quad u_j + u_{n-j+1} = u_1 + u_n$. En effet

$$\begin{array}{rcl} u_j + u_{n-j+1} & = & u_1 + (j-1)r - u_1 + (n-j+1-1)r \\ & = & u_1 + u_1 + (n-1)r \\ & = & u_1 + u_n \end{array}$$

Calculons $2s_n$

$$\begin{array}{rrcccccccccc} & s_n & = & u_1 & + & u_2 & + & \ldots & + & u_{n-1} & + & u_n \\ + & s_n & = & u_n & + & u_{n-1} & + & \ldots & + & u_2 & + & u_1 \\ \hline = & 2s_n & = & (u_1+u_n) & + & (u_2+u_{n-1}) & + & \ldots & + & (u_{n-1}+u_2) & + & (u_n+u_1) \\ & & = & (u_1+u_n) & + & (u_1+u_n) & + & \ldots & + & (u_1+u_n) & + & (u_1+u_n) \\ & & = & (u_1+u_n)n & & & & & & & & \end{array}$$

Il suit $s_n = \dfrac{u_1+u_n}{2} \cdot n$ $\square$