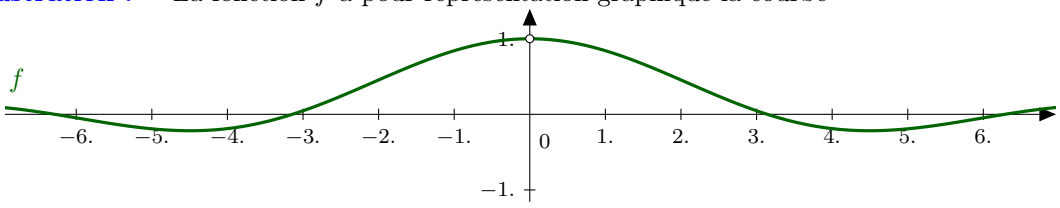
Limite de la fonction $x \mapsto \dfrac{sin(x)}{x}$ en 0

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème :

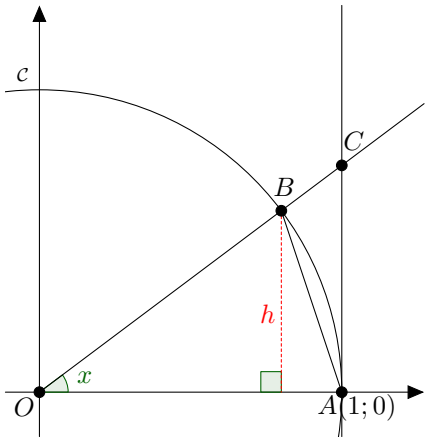
Si f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$
alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Illustration : La fonction f a pour représentation graphique la courbe



Le domaine de f est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La représentation graphique de f laisse supposer que lorsque x tend vers 0, la limite de $f(x)$ vaut 1. Pour prouver cela, on calcule les limites à gauche et à droite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 car un calcul direct oblige à lever une indétermination.

Démonstration : **Calcul de la limite à droite**



Le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique. Donc $h = \sin(x)$ et $AC = \tan(x)$.

L'angle x est dans le 1er quadrant : $0 < x < \pi/2$. Pour tout x dans ce quadrant on a $\sin(x) > 0$ et $\cos(x) > 0$. En particulier $\sin(x) \neq 0$.

Désignons l'aire du triangle OAB par $\mathcal{A}_{\Delta OAB}$, l'aire du secteur OAB par $\mathcal{A}_{sOAB}$ et l'aire du triangle OAC par $\mathcal{A}_{\Delta OAC}$. On voit sur la figure que

$$\mathcal{A}_{\Delta OAB} < \mathcal{A}_{sOAB} < \mathcal{A}_{\Delta OAC}$$

Or $\mathcal{A}_{\Delta OAB} = \dfrac{OA \cdot h}{2} = \dfrac{1 \cdot \sin(x)}{2} = \dfrac{\sin(x)}{2}$, donc $\mathcal{A}_{\Delta OAB} = \dfrac{\sin(x)}{2}$.

Comme $\dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{\mathcal{A}_{sOAB}}{\pi \cdot 1^2}$ on déduit que $\mathcal{A}_{sOAB} = \dfrac{x}{2}$.

Enfin $\mathcal{A}_{\Delta OAC} = \dfrac{OA \cdot AC}{2} = \dfrac{1 \cdot \tan(x)}{2} = \dfrac{\tan(x)}{2}$ donne $\mathcal{A}_{\Delta OAC} = \dfrac{\tan(x)}{2}$.

On peut donc écrire

$$\mathcal{A}_{\Delta OAB} < \mathcal{A}_{sOAB} < \mathcal{A}_{\Delta OAC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan(x)}{2}$$

Puisque $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et que $\dfrac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{2} = \dfrac{\sin(x)}{2\cos(x)}$ on peut écrire

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$$

Comme $\sin(x) \neq 0$ et que $\dfrac{2}{\sin(x)} > 0$ on peut multiplier chaque membre de l'encadrement par $\dfrac{2}{\sin(x)}$ sans changer l'ordre. Donc

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{2} < \frac{2}{\sin(x)} \cdot \frac{x}{2} < \frac{2}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$$

Après simplification on a

$$\Leftrightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

Comme 1, $\dfrac{x}{\sin(x)}$ et $\dfrac{1}{\cos(x)}$ sont tous positifs, leurs inverses sont ordonnés de manière décroissante

$$\Leftrightarrow \quad 1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x)$$

On constate que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est encadrée par la fonction constante $x \mapsto 1$ et la fonction cosinus. De plus, on a

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos(x) = \cos(0) = 1$ par continuité de la fonction cosinus.
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 = \lim\limits_{x \to 0^+} \cos(x)$

Un théorème (le théorème des gendarmes) nous garantit que dans une telle situation (une fonction est encadrée par deux fonctions dont les limites existent et sont les mêmes) la limite de la fonction encadrée existe et est égale à celle des deux autres. On peut donc écrire que

$$\lim_{x \to 0^+} 1 = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \cos(x) = 1$$

et conclure que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Calcul de la limite à gauche : Prendre un nombre x négatif revient à dire qu'il existe un nombre y positif pour lequel $x = -y$. De plus, si x tend vers 0 par la gauche, y tend vers 0 par la droite. On a donc en remplaçant x par $-y$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} &= \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y} && \text{en substituant } x \text{ par } -y \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{-\sin(y)}{-y} && \text{car la fonction sinus a la propriété que } \sin(-y) = -\sin(y) \\
& && \text{pour tout nombre y} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(y)}{y} && \text{ou encore, après simplification} \\
&= 1 && \text{par la première partie de la démonstration.}
\end{aligned}$$

Conclusion Comme $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ il suit que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. $\square$