Résolution d'un système d'équations linéaires 2×2 à l'aide des règles de Cramer

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Soit $\mathcal{S}$ un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues $\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array} \right.$.

Sous forme matricielle ce système s'écrit $A \cdot x = b$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Théorème Soit $A \cdot x = b$

Si $det(A) \neq 0$

Alors Le système admet une solution unique où $x_1 = \dfrac{det\left(A_1(b)\right)}{det(A)}$ et $x_2 = \dfrac{det\left(A_2(b)\right)}{det(A)}$.

Remarques :

1. La notation $A_i(b)$ signifie qu'on substitue les composantes du vecteur b aux composantes de la colonne i de la matrice A, par exemple, $A_2(b) = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$.
2. On rappelle que la propriété suivante des déterminants : $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.

Démonstration : Plus qu'une démonstration, il s'agit ici d'une vérification.

Nous constatons que $A \cdot I_1(x) = A_1(b)$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité. En effet :

$$A \cdot I_1(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} = A_1(b).$$

Donc $det\left(A \cdot I_1(x)\right) = det\left(A_1(b)\right)$. En vertu du rappel sur les déterminants, il suit que $det(A) \cdot det\left(I_1(x)\right) = det\left(A_1(b)\right)$. Comme $det\left(I_1(x)\right)) = x_1$ on déduit, à la condition que $det(A) \neq 0$, que

$$x_1 = \frac{det\left(A_1(b)\right)}{det(A)}.$$

De même, partant du constat que $A \cdot I_2(x) = A_2(b)$, on déduit que

$$x_2 = \frac{det\left(A_2(b)\right)}{det(A)}.$$

□

Remarque : Ce procédé se généralise aisément à des systèmes linéaires $n \times n$ avec $n \geq 3$ via la relation $A \cdot I_j(x) = A_j(b)$ $(1 \leq j \leq n)$.