Propriétés des déterminants de matrices 2×2

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Déterminant d'une matrice 2×2 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Le déterminant de A est un nombre

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} a \det\big((d)\big) + (-1)^{1+2} b \det\big((c)\big) && \text{en vertu de la définition générale du déterminant en développant selon la première ligne et du fait que } \det\big((r)\big) = r \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

Propriété 1 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ pour A, B des matrices 2×2.

Propriété 2 $\det(kA) = k^2 \det(A)$ pour A une matrice 2×2 et $k \in \mathbb{R}$.

Propriété 3 $\det(I) = 1$ pour I la matrice identité (2×2).

Propriété 4 $\det(A) =$ produit des éléments de la diagonale, pour A une matrice 2×2 triangulaire.

Démonstration de la propriété 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ deux matrices 2×2.

D'une part nous avons $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$ et il suit que

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (c\alpha + d\gamma)(a\beta + b\delta) \\ &= a\alpha c\beta + a\alpha d\delta + b\gamma c\beta + b\gamma d\delta - c\alpha a\beta - c\alpha b\delta - d\gamma a\beta - d\gamma b\delta \\ &= a\alpha d\delta + b\gamma c\beta - c\alpha b\delta - d\gamma a\beta \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \det(A)\det(B) &= (ad - bc)(\alpha\delta - \gamma\beta) \\ &= a\alpha d\delta - ad\gamma\beta - bc\alpha\delta + bc\gamma\beta \\ &= a\alpha d\delta + b\gamma c\beta - c\alpha b\delta - d\gamma a\beta \end{aligned}$$

Il suit que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. $\square$

Démonstration de la propriété 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 et $k \in \mathbb{R}$.

Comme $kA = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$ il suit que

$$\begin{aligned} \det(kA) &= (kakd - kbkc) \\ &= (k^2ad - k^2bc) \\ &= k^2(ad - bc) \\ &= k^2 \det(A) \ \square \end{aligned}$$

Démonstration de la propriété 3 : Comme $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ il suit immédiatement que $\det(I) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$. $\square$

Démonstration de la propriété 4 : Soit A une matrice 2×2 triangulaire. Si A est triangulaire supérieure alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Si elle est triangulaire inférieure $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$. Donc

1. $\det(A) = (ad - 0 \cdot b) = ad$ si A est triangulaire supérieure et

2. $\det(A) = (ad - c \cdot 0) = ad$ si A est triangulaire inférieure.

On conclut que le déterminant d'une matrice triangulaire 2×2 est le produit des éléments de sa diagonale. $\square$