Quelques propriétés de la fonction logarithme

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Définition : La fonction ln est définie par

$$\begin{array}{rccc} \ln & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} \end{array}$$

Dérivabilité, continuité, croissance : La fonction ln est dérivable, continue et croissante. Le théorème fondamental garantit que la fonction ln est dérivable. Sa dérivée est la fonction inverse f avec $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \text{ sur }]0; +\infty[\,.$$

Il suit que la fonction ln est continue. De plus, comme $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété 1 $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour tout $a, b > 0$.

Démonstration de la propriété 1 : En effet, en dérivant $\ln(ax)$ nous obtenons $(\ln(ax))' = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$. Donc $x \mapsto \ln(ax)$ est une primitive de la fonction inverse, mais comme $x \mapsto \ln(x)$ en est une également, ces deux primitives diffèrent par une constante c : $\ln(ax) = \ln(x) + c$ pour tout $x > 0$.

En particulier, si on prend $x = 1$ on obtient $\ln(a \cdot 1) = \ln(1) + c = c$ donc $c = \ln(a)$.
Et si, à présent, on prend $x = b$ on obtient la formule attendue, savoir $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour tout $a, b > 0$. □

Propriété 2 $\ln(a^n) = n \ln(a)$ pour tout $a > 0$ et $n \in \mathbb{Q}$.

Démonstration de la propriété 2 : En effet, en dérivant $\ln(x^n)$ nous obtenons $(\ln(x^n))' = \frac{1}{x^n} \cdot nx^{n-1} = n \cdot \frac{1}{x} = n \cdot (\ln(x))' = (n \cdot \ln(x))'$.

Donc $x \mapsto \ln(x^n)$ et $x \mapsto n \ln(x)$ sont primitives d'une même fonction et elles diffèrent par une constante c : $\ln(x^n) = n \ln(x) + c$ pour tout $x > 0$.

En particulier, si on prend $x = 1$ on obtient $\ln(1) = n \cdot \ln(1) + c = 0$ donc $c = 0$.
Donc on a $\ln(x^n) = n \ln(x)$ pour tout x et en posant $x = a$ on retrouve la formulation originale de la propriété 2. □