Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre dans $\mathbb{R}^3$

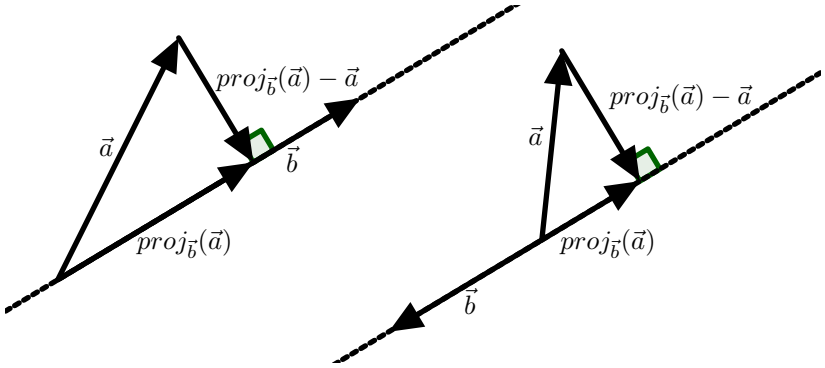
Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Si $proj_{\vec{b}}(\vec{a})$ est le vecteur résultant de la projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$

Alors $proj_{\vec{b}}(\vec{a}) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{||\vec{b}||^2}\,\vec{b}$ et $||proj_{\vec{b}}(\vec{a})|| = \dfrac{|\vec{a} \bullet \vec{b}|}{||\vec{b}||}$.

Illustration du théorème :



Démonstration : Par construction $proj_{\vec{b}}(\vec{a})$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel λ pour lequel $proj_{\vec{b}}(\vec{a}) = \lambda\vec{b}$.
Par ailleurs, toujours par construction, les vecteurs $proj_{\vec{b}}(\vec{a}) - \vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que $(proj_{\vec{b}}(\vec{a}) - \vec{a}) \bullet \vec{b} = 0$. Calculons cette dernière expression :

$$
\begin{aligned}
(proj_{\vec{b}}(\vec{a}) - \vec{a}) \bullet \vec{b} = 0 \quad &\iff \quad proj_{\vec{b}}(\vec{a}) \bullet \vec{b} - \vec{a} \bullet \vec{b} = 0 && \text{par distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition} \\
&\iff \quad proj_{\vec{b}}(\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \vec{b} && \\
&\iff \quad (\lambda\vec{b}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \vec{b} && \text{par le premier constat} \\
&\iff \quad \lambda(\vec{b} \bullet \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{b} && \text{par une propriété du produit scalaire} \\
&\iff \quad \lambda||\vec{b}||^2 = \vec{a} \bullet \vec{b} && \text{car } \vec{b} \bullet \vec{b} = ||\vec{b}||^2 \\
&\iff \quad \lambda = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{||\vec{b}||^2} && \text{car } ||\vec{b}||^2 \neq 0 \text{ puisque } \vec{b} \neq \vec{0}
\end{aligned}
$$

Il suit que $proj_{\vec{b}}(\vec{a}) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{||\vec{b}||^2}\,\vec{b}$.

Enfin nous avons bien $||proj_{\vec{b}}(\vec{a})|| = \dfrac{|\vec{a} \bullet \vec{b}|}{||\vec{b}||}$. En effet,

$$
\begin{aligned}
||proj_{\vec{b}}(\vec{a})|| &= \left|\left| \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{||\vec{b}||^2} \vec{b} \right|\right| \\
&= \left| \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{||\vec{b}||^2} \right| ||\vec{b}|| \quad \text{car } ||\lambda \vec{v}|| = |\lambda| ||\vec{v}|| \\
&= \frac{|\vec{a} \bullet \vec{b}|}{||\vec{b}||^2} ||\vec{b}|| \quad \text{car } \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ et } ||\vec{b}||^2 > 0 \\
&= \frac{|\vec{a} \bullet \vec{b}|}{||\vec{b}||} \quad \text{après simplification}
\end{aligned}
$$

□