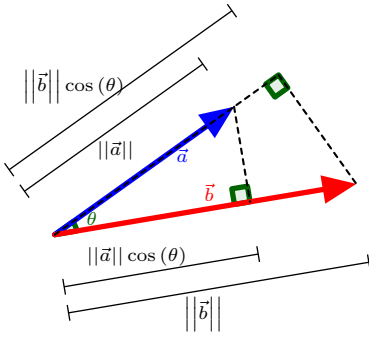
Produit scalaire - définitions et angles

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité.
Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Définition Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, noté $\vec{a} \bullet \vec{b}$, est le nombre réel (le scalaire)

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = ||\vec{a}|| \left|\left|\vec{b}\right|\right| \cos(\theta) \text{ où } \theta = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \text{ avec } 0° \leq \theta \leq 180°.$$

est l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ lorsque ceux-ci sont ramenés à une même origine.

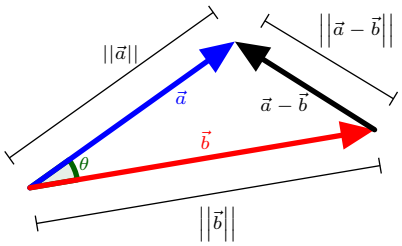


Théorème Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Alors $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Démonstration : Par le théorème du cosinus on déduit :



$$\left|\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\right|^2 = ||\vec{a}||^2 + \left|\left|\vec{b}\right|\right|^2 - 2\,||\vec{a}||\cdot\left|\left|\vec{b}\right|\right|\cos(\theta)$$

$$\iff ||\vec{a}||\cdot\left|\left|\vec{b}\right|\right|\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(||\vec{a}||^2 + \left|\left|\vec{b}\right|\right|^2 - \left|\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\right|^2\right) \qquad \text{en isolant } ||\vec{a}||\cdot\left|\left|\vec{b}\right|\right|\cos(\theta)$$

$$\iff \vec{a}\bullet\vec{b} = \frac{1}{2}\left(||\vec{a}||^2 + \left|\left|\vec{b}\right|\right|^2 - \left|\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\right|^2\right) \qquad \text{par définition du produit scalaire}$$

$$\iff \vec{a}\bullet\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right)^2 + \left(\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}\right)^2\right) \qquad \text{par définition de la norme}$$

$$\iff \vec{a}\bullet\vec{b} = \frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2-(b_3-a_3)^2\right)$$

$$\iff \vec{a}\bullet\vec{b} = \frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2 - b_1^2+2a_1b_1-a_1^2-b_2^2+2a_2b_2-a_2^2-b_3^2+2a_3b_3-a_3^2)$$

$$\iff \vec{a}\bullet\vec{b} = \frac{1}{2}(2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3)$$

$$\iff \vec{a}\bullet\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) \qquad \square$$

Théorème Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et θ l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ lorsque ceux-ci sont ramenés à une même origine.

$$\text{Alors} \quad \theta = \arccos\left(\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{||\vec{a}||\cdot\left|\left|\vec{b}\right|\right|}\right).$$

Démonstration : Immédiate en isolant l'angle dans les deux définitions du produit scalaire :

$$||\vec{a}||\cdot\left|\left|\vec{b}\right|\right|\cos(\theta) = \vec{a}\bullet\vec{b} \iff \cos(\theta) = \frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{||\vec{a}||\cdot\left|\left|\vec{b}\right|\right|} \iff \theta = \arccos\left(\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{||\vec{a}||\cdot\left|\left|\vec{b}\right|\right|}\right).$$

Remarques :

1. θ est aigu $\iff \cos(\theta) > 0 \iff \vec{a}\bullet\vec{b} > 0$
2. θ est droit $\iff \cos(\theta) = 0 \iff \vec{a}\bullet\vec{b} = 0$
3. θ est obtus $\iff \cos(\theta) < 0 \iff \vec{a}\bullet\vec{b} < 0$

Définition Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux $\iff \vec{a}\bullet\vec{b} = 0$