Probabilité de l'union de deux événements

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Une probabilité P est une fonction qui, à chaque événement A de l'univers (à chaque sous-ensemble de l'ensemble Ω) associe un nombre réel $P(A)$ vérifiant les axiomes suivants :

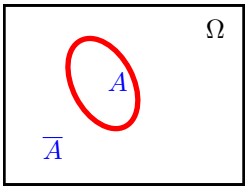
1. Axiome 1 : $P(A) \geq 0$ (la probabilité d'un événement est positive)
2. Axiome 2 : $P(\Omega) = 1$ (la probabilité de l'événement certain est de "100%")
3. Axiome 3 : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour toute paire d'événements incompatibles A et B ($A \cap B = \emptyset$)

Théorème Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire,

Si A et B sont deux événements de Ω

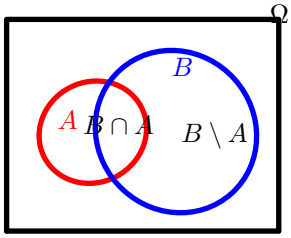
Alors Propriété 1 : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ où $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans Ω
Propriété 2 : $P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A)$
Propriété 3 :$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Illustration de la propriété 1 :



Démonstration de la propriété 1 : On rappelle que $\overline{A} = \Omega \setminus A$. Puisque $\Omega = (\Omega \setminus A) \cup A$ et que $(\Omega \setminus A) \cap A = \emptyset$ on peut appliquer le troisième axiome pour obtenir $P(\Omega) = P(\Omega \setminus A) + P(A)$ c'est-à-dire $1 = P(\Omega \setminus A) + P(A)$. On déduit immédiatement que $1 - P(A) = P(\Omega \setminus A)$ ou encore $1 - P(A) = P(\overline{A})$.

Illustration des propriétés 2 et 3 :



Démonstration de la propriété 2 : Puisque $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$ et que $(B \cap A) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ on peut appliquer le troisième axiome pour obtenir $P(B) = P(B \cap A) + P(B \setminus A)$ c'est-à-dire $P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A)$.

Démonstration de la propriété 3 : On remarque que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ et que les événements A et $B \setminus A$ sont incompatibles. Il suit que

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A)) \overset{Axiome\,3}{=} P(A) + P(B \setminus A) \overset{Prop.\,2}{=} P(A) + P(B) - P(B \cap A).$$

□