Théorème de Newton-Leibniz

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

À partir du théorème fondamental, qui garantit l'existence de primitives pour des fonctions continues, on peut calculer une intégrale définie dont on connaît une primitive.

Théorème de Newton-Leibniz Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

Si F est une primitive de f sur $[a;b]$

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$

Démonstration : Supposons que nous connaissions une primitive F de la fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$. Le théorème fondamental garantit que la fonction Φ définie par $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est également une primitive de f. De plus nous savons que deux primitives ne diffèrent que d'une constante. Donc, il existe une constante c pour laquelle, pour tout $x \in [a;b]$

$$\Phi(x) = F(x) + c$$

c'est-à-dire

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c\,.$$

Cette relation est en particulier vraie pour $x = a$ et également pour $x = b$. Lorsque $x = a$, elle devient

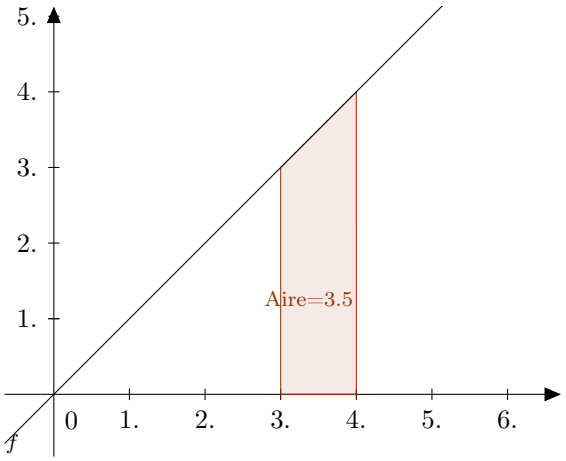
$$\int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + c$$

En vertu de la propriété du calcul intégral qui affirme que $\int_a^a f(t)dt = 0$, on déduit que $c = -F(a)$.
Lorsque $x = b$ nous avons alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) + c = F(b) - F(a)$$

ce qui démontre le théorème.
□

Exemple : Cette formule est d'une grande utilité dans le calcul des intégrales et elle montre le lien existant entre le intégrales et les primitives. Par exemple, calculons l'aire de la surface comprise entre le graphe de f où $f(x) = x$, les droites verticales d'équation $x = 3$ et $x = 4$ et l'axe des x. Géométriquement nous avons



l'aire d'un trapèze dont la petite base vaut $f(3) = 3$, la grande base vaut $f(4) = 4$ et la hauteur vaut $4 - 3 = 1$. Donc l'aire est $\frac{(3+4)\cdot 1}{2} = 3,5$.
Ce calcul devient, via le théorème de Newton-Leibniz, $\int_3^4 x dx = \frac{x^2}{2}|_3^4 = 8 - 4,5 = 3,5$ puisque F définie par $F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de f.
Dans cet exemple, une méthode vaut l'autre. Mais lorsque la fonction f est "plus compliquée", la géométrie élémentaire ne suffit plus toujours à exprimer l'aire recherchée et le théorème de Newton-Leibniz prend toute sa valeur.