Interprétation géométrique du nombre dérivé

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Définition Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Si la limite

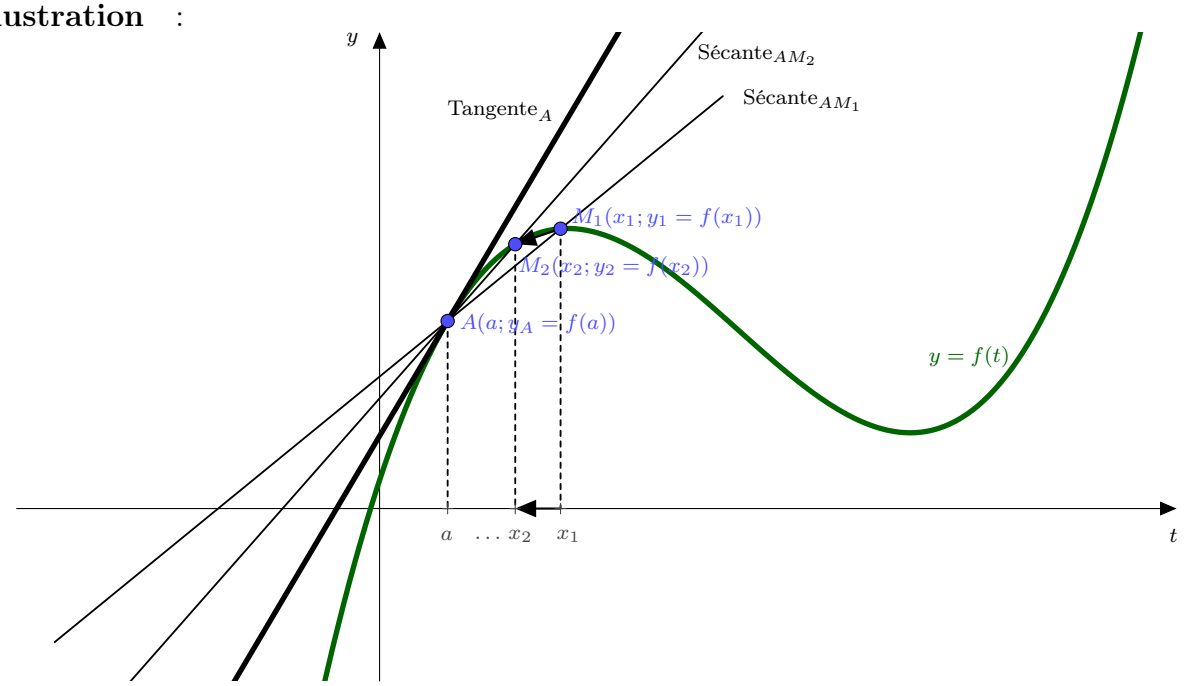
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et vaut un nombre réel r, on dit alors que la fonction f est *dérivable* en $x = a$, et le nombre r, qu'on note $f'(a)$, s'appelle le *nombre dérivé* de f en a.

Interprétation géométrique du nombre f'(a) :

1. Pour donner une interprétation géométrique de ce nombre, on commence par interpéter le nombre $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ comme la pente d'une droite coupant la représentation graphique de f en au moins deux points A et M : une sécante.
2. On fixe un des points d'intersection entre le graphe de f et cette sécante A et on approche le second point, le point mobile M $(M_1, M_2, \dots)$, du premier tout en restant sur le graphe de f.
3. On étudie le comportement de la pente des sécantes successives obtenues lorsque le point mobile s'approche de A par passage à la limite. L'interprétation en découle.

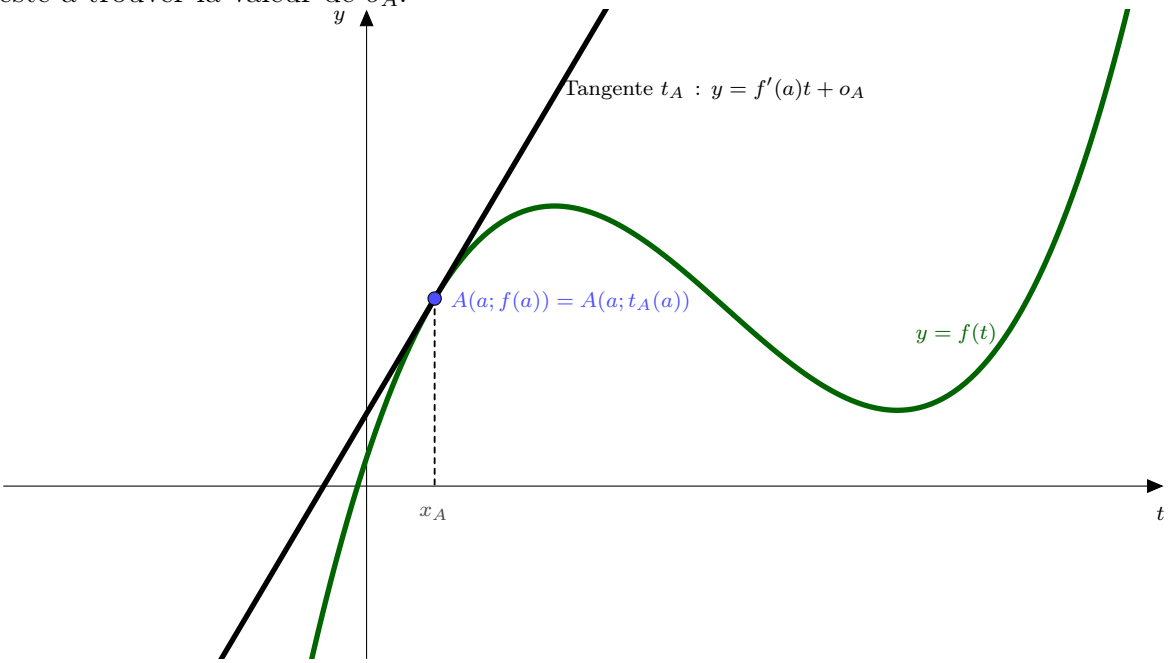
Illustration :



Notations : Soit p_1 la pente de la sécante au début du processus, p_2 la pente de la sécante après qu'on ait approché un peu le point M_1 de A, *etc*, et p_A la pente de la tangente si elle existe.

1. Les sécantes successives ont pour pente $p_i = \dfrac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a}$.
2. Lorsque l'on approche le point mobile M du point A, l'abscisse de M s'approche de celle de A ($x \to a$) et réciproquement.
3. Lorsque l'on approche le point mobile M du point A, la sécante s'approche d'une droite limite qu'on nommera la tangente à f au point A.
4. Lorsque $x \to a$, la pente p de la sécante s'approche de la pente p_A de cette tangente. Donc on a
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = p_A.$$
5. Si cette pente existe ($p_A \in \mathbb{R}$), elle égale le nombre dérivé $f'(a)$, et en donne une interprétation géométrique.

Équation de la tangente à f au point $A(a; y_a = f(a))$: Établir l'expression algébrique de la fonction t_A revient à déterminer les valeurs de p_A et de o_A. L'interprétation précédente fournit la valeur de p_A : c'est le nombre $f'(a)$ si la tangente est une droite oblique ou horizontale. Il reste à trouver la valeur de o_A.



Comme A est un point qui se trouve par construction à l'intersection du graphe de f et de la droite tangente, on déduit que $f(a) = t_A(a)$. Il suit de l'expression de t_A que $t_A(a) = f'(a) \cdot a + o_A$ d'où $f(a) = f'(a) \cdot a + o_A$ c'est-à-dire que $o_A = f(a) - f'(a) \cdot a$. Il suit que la fonction t_A est définie par
$$t_A(x) = f'(a) \cdot x - f'(a) \cdot a + f(a) = f'(a)(x - a) + f(a).$$