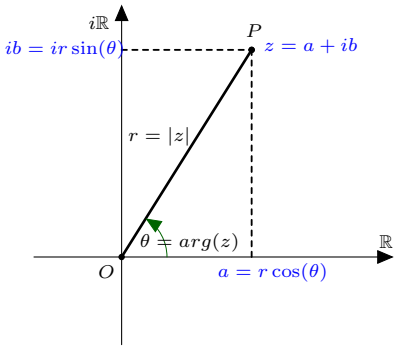
Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle *module* ou *norme* de z, noté $|z|$, la longueur r du segment $[OP]$.
On appelle *argument* de z, noté $arg(z)$, la mesure en radian de l'angle orienté θ entre l'axe horizontal et le segment $[OP]$ à un multiple de 2π près.



En vertu des relations élémentaires de trigonométrie, tout nombre complexe admet l'écriture sous *forme trigonométrique* suivante :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \quad \text{avec } r = |z| \text{ et } \theta = arg(z).$$

Théorème Dans l'ensemble des nombres complexes

Si $z, w \in \mathbb{C}$

Alors a) $arg(z \cdot w) = arg(z) + arg(w)$ et $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
b) $arg\left(\frac{z}{w}\right) = arg(z) - arg(w)$ et $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

Commentaire : Ce théorème permet le constat que :
a) Multiplier deux nombres complexes revient à multiplier leurs modules et à additionner leurs arguments,
b) Diviser deux nombres complexes revient à diviser leurs modules et à soustraire leurs arguments.

Rappels : On dispose des relations trigonométriques suivantes :

a) $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
b) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
c) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
d) $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
e) $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

Démonstration : Soit $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ et $z = s(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$ deux nombres complexes

Multiplication

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \cdot s(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) \\ &= rs[(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) + i(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta))] \\ &\overset{\text{a) et b)}}{=} rs[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] \end{aligned}$$

On en déduit les relations a) du théorème.

Division

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))}{s(\cos(\beta) + i\sin(\beta))} \\ &= \frac{r}{s} \cdot \frac{(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))}{(\cos(\beta) + i\sin(\beta))} \cdot \frac{(\cos(\beta) - i\sin(\beta))}{(\cos(\beta) - i\sin(\beta))} \\ &= \frac{r}{s} \cdot \frac{(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)) + i(\sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha))}{(\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta))} \\ &\overset{\text{a), d) et e)}}{=} \frac{r}{s} \cdot \frac{\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)}{1} \\ &= \frac{r}{s}[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)] \end{aligned}$$

On en déduit les relations b) du théorème. □