Étude de la fonction logarithme

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Préambule : En calcul intégral, il est établit que les fonctions dont les expressions analytiques sont de la forme t^α admettent comme primitives des fonctions de la forme $\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Ceci n'a de sens que si $\alpha \neq -1$. On traite ici de ce cas particulier, c'est-à-dire d'une primitive de t^{-1}. La fonction réelle inverse $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(t) = \frac{1}{t}$ est dérivable, continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante. De plus, étant son propre inverse, $(f \circ f)(t) = t$, elle est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = t$. Puisque cette fonction est continue, le théorème fondamental de l'analyse garantit qu'elle admet une primitive $x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$. Nous appellerons F cette primitive.

Définition : La fonction F est définie par

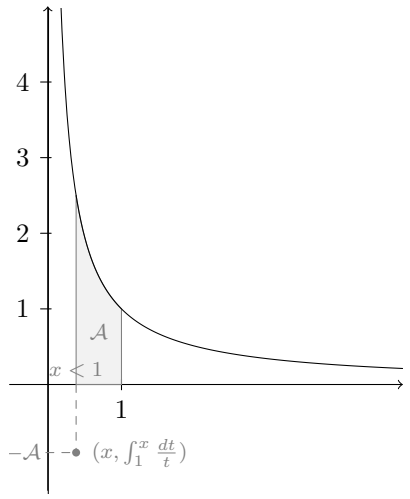
$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \int_1^x \frac{dt}{t} \end{array}$$

Dérivabilité, continuité, croissance : La fonction F est dérivable, continue et croissante. Le théorème fondamental garantit que la fonction F est dérivable. Sa dérivée est f :

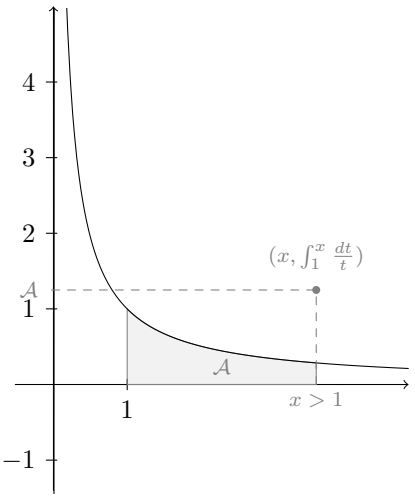
$$F'(x) = \frac{1}{x} \text{ sur }]0; +\infty[\,.$$

Il suit que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, comme $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, F est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Signes de F : On rappelle qu'une primitive de fonction positive est positive à condition que $a < b$. Si $a > b$ alors l'intégrale donnera un résultat négatif. Appliquée à F, cette propriété montre que



si $0 < x < 1$, alors $F(x) = \int_1^x f(t)dt < 0$,



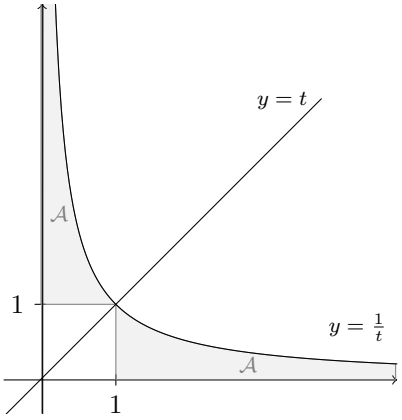
si $x > 1$, alors $F(x) = \int_1^x f(t)dt > 0$,

et qu'enfin, si $x = 1$, alors $F(1) = \int_1^1 f(t)dt = 0$.

Comportement asymptotique de F lorsque x tend vers l'infini : On affirme sans démonstration que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Comportement asymptotique de F lorsque x tend vers 0 par la droite (MA1) : On affirme sans démonstration que $\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\infty$.

Comportement asymptotique de F lorsque x tend vers 0 par la droite (MA2) : La fonction inverse est sa propre réciproque, son graphe est symétrique selon l'axe $y = t$. Par symétrie, l'aire comprise entre l'axe des ordonnées, la droite $y = 1$ et le graphe de f est la même que celle comprise entre l'axe des abscisses, la droite $x = 1$ et le graphe de f. En vertu des résultats énoncés sur le signe de F on déduit que $\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ est donc une asymptote verticale de F.



La fonction F dispose de deux propriétés fondamentales suivantes (sans démonstration) qui font d'elle une fonction qui se comporte comme une fonction logarithme :

$$F(ab) = F(a) + F(b) \text{ pour tout } a, b > 0 \text{ et}$$
$$F(a^n) = nF(a) \text{ pour tout } a > 0 \text{ et } n \in \mathbb{Q}.$$

On la note par ln.

Graphe de F et base du logarithme : La base du logarithme est la préimage de 1. C'est un nombre irrationnel noté e et qui vaut approximativement $2,7182$.

