Distance entre un point et un plan dans $\mathbb{R}^3$

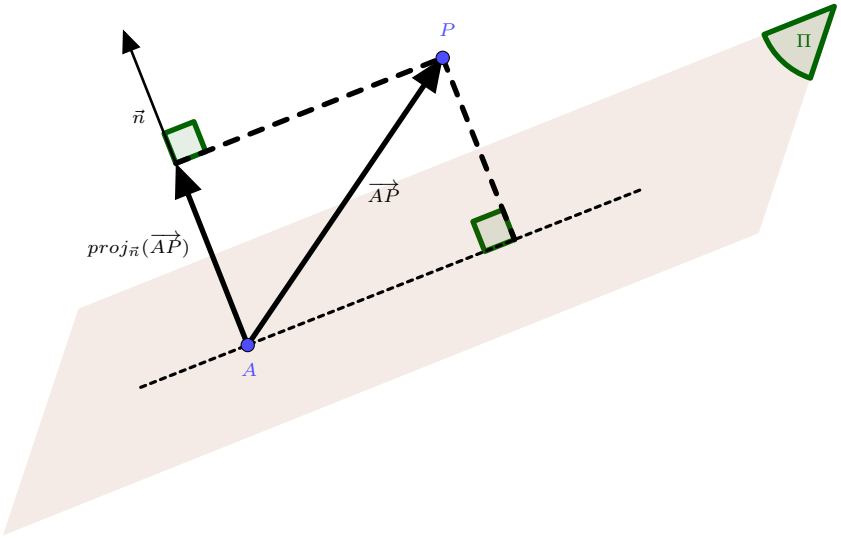
Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème Soit $\Pi : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ un plan défini par une équation cartésienne dont le vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et soit $A(a_1; a_2; a_3)$ un point de $\mathbb{R}^3$ appartenant au plan Π. Soit $P(x_0; y_0; z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$.

Si $\delta(P; \Pi)$ représente la distance du point P au plan π

Alors $\delta(P; \pi) = \dfrac{|\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP}|}{||\vec{n}||} = \dfrac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$.

Illustration du théorème :



Démonstration : Nous savons que le vecteur $\overrightarrow{AP}$ projeté orthogonalement sur le vecteur $\vec{n}$ a pour expression $proj_{\vec{n}}(\overrightarrow{AP}) = \dfrac{\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP}}{||\vec{n}||^2}\,\vec{n}$. La distance $\delta(P; \Pi)$ est donc égale à la norme de ce vecteur :

$$
\begin{aligned}
\left|\left|proj_{\vec{n}}(\overrightarrow{AP})\right|\right| &= \left|\left|\frac{\vec{n}\bullet\overrightarrow{AP}}{||\vec{n}||^2}\,\vec{n}\right|\right| \\
&= \left|\frac{\vec{n}\bullet\overrightarrow{AP}}{||\vec{n}||^2}\right| ||\vec{n}|| \quad \text{en vertu de la propriété } ||\lambda\vec{v}|| = |\lambda|\,||\vec{v}|| \\
&= \frac{|\vec{n}\bullet\overrightarrow{AP}|}{|||\vec{n}||^2|}\,||\vec{n}|| \quad \text{car } \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \\
&= \frac{|\vec{n}\bullet\overrightarrow{AP}|}{||\vec{n}||^2}\,||\vec{n}|| \quad \text{car } ||\vec{n}||^2 > 0 \\
&= \frac{|\vec{n}\bullet\overrightarrow{AP}|}{||\vec{n}||} \qquad \text{et donc } \delta(P;\Pi) = \frac{|\vec{n}\bullet\overrightarrow{AP}|}{||\vec{n}||}
\end{aligned}
$$

En terme de composantes, cette formule fournit

$$
\begin{aligned}
\delta(P;\Pi) &= \frac{|\vec{n}\bullet\overrightarrow{AP}|}{||\vec{n}||} \\
&= \frac{\left|\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x_0-a_1\\ y_0-a_2\\ z_0-a_3\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} \\
&= \frac{|\alpha(x_0-a_1)+\beta(y_0-a_2)+\gamma(z_0-a_3)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} \quad \text{par définition du produit scalaire} \\
&= \frac{|\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0-\alpha a_1-\beta a_2-\gamma a_3|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} \\
&= \frac{|\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0-(\alpha a_1+\beta a_2+\gamma a_3)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} \\
&= \frac{|\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0-(-\delta)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} \quad \begin{array}{l}\text{car } A\in\Pi \text{ signifie } \alpha a_1+\beta a_2+\gamma a_3+\delta=0 \\ \text{ou encore que } \alpha a_1+\beta a_2+\gamma a_3=-\delta\end{array} \\
&= \frac{|\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0+\delta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}
\end{aligned}
$$

□