Dérivée de la fonction tangente

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème

Si f est la fonction tangente, $f(x) = \tan(x)$

Alors 1°) f est dérivable pour tout x dans son domaine
$(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\})$

2°) $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ pour tout x dans le domaine.

Démonstration du théorème : On sait que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables, que $(\sin(x))' = \cos(x)$, que $(\cos(x))' = -\sin(x)$ et que le quotient de deux fonctions dérivables est dérivable.

Comme $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, il suit que la tangente est une fonction dérivable sur son domaine (puisque le cosinus s'annule sur $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$).

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
(\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' \\
&= \frac{(\sin(x))' \cos(x) - \sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

Comme $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ il suit d'une part que $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Par ailleurs, comme $\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)^2 = 1 + \tan^2(x)$ il suit d'autre part que $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$.

□