Dérivée de la fonction sinus

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème

Si f est la fonction sinus, $f(x) = \sin(x)$

Alors 1°) f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$

2°) $f'(x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque: Pour procéder à la démonstration, on va recourir à la formule trigonométrique $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ qu'on ne démontre pas.

Démonstration du théorème : Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{a+h+a}{2}\right)\sin\left(\frac{a+h-a}{2}\right)}{h} && \text{par l'application de la formule ci-dessus}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right) && \text{après réarrangement des termes}\\
&= \lim_{H\to 0}\left(\cos\left(a+H\right)\frac{\sin(H)}{H}\right) && \text{en posant } H=\frac{h}{2} \text{ et en constatant}\\
& && \text{que } H\to 0 \Leftrightarrow h\to 0
\end{aligned}$$

1°: On sait que $\lim_{H\to 0}\frac{\sin(H)}{H} = 1$

2°: Les fonctions $H \mapsto a+H$ et $H \mapsto \cos(H)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
On sait que la composition de fonctions continues est continue.
Donc la fonction $H \mapsto \cos(a+H)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
On a alors $\lim_{H\to 0}\cos\left(a+H\right) = \cos(a+0) = \cos(a)$.
Puisque ces deux limites existent, on peut décomposer la limite principale:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{H\to 0}\cos\left(a+H\right)\cdot\lim_{H\to 0}\frac{\sin(H)}{H} && \text{car ces deux limites existent}\\
&= \cos(a)\cdot 1 = \cos(a) && \text{qui est un nombre}\\
&= (\sin(a))' && \text{plus précisément le nombre dérivé}
\end{aligned}$$

On vient de montrer que $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \cos(a) \in \mathbb{R}$. Donc la fonction sinus est dérivable et de plus $(\sin(a))' = \cos(a)$. Comme cette conclusion est indépendante du choix de $a \in \mathbb{R}$, on peut généraliser ce résultat à $\mathbb{R}$. On conclut que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\sin(x))' = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. □