# Dérivée d'un quotient de fonctions

**Note :** Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

**Théorème** Quotient de fonctions dérivables

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$.

Si $f$ et $g$ sont dérivables sur $I$ et si $g$ n'est jamais nulle sur $I$

Alors 1°) la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $I$,

2°) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ pour tout $x \in I$.

**Démonstration :** On remarque que $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$.

Comme $g$ n'est pas nulle sur $I$ et comme elle est dérivable alors la fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable et la formule de la dérivée de l'inverse s'applique: $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

D'autre part comme le produit de fonctions dérivables est dérivable et que $f$ est dérivable il suit que la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $I$.

$$\begin{aligned}
\text{De plus} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) \\
&\overset{(1)}{=} f'(x)\frac{1}{g}(x) + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) \\
&\overset{(2)}{=} f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\left(\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) \\
&\overset{(3)}{=} \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \text{ pour tout } x \in I.
\end{aligned}$$

L'égalité (1) est l'application de la formule donnant la dérivée d'un produit de fonctions dérivables.
L'égalité (2) découle de la formule de l'inverse rappelée ci-dessus et de la définition de l'inverse d'une fonction : $\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}$.
L'égalité (3) découle d'une manipulation algébrique élémentaire. □