Dérivée d'un produit de fonctions dérivables

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont certainement différentes.

Théorème Produit de fonctions dérivables

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

Si f et g sont dérivables sur I

Alors 1°) la fonction fg est dérivable sur I,
2°) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ pour tout $x \in I$.

Démonstration : Soit $a \in I$.

$$\lim_{x\to a} \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$ par définition du produit de fonctions

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$ car $-f(a)g(x)+f(a)g(x)=0$

$$= \lim_{x\to a} \left[\left(\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\right) g(x) + f(a)\left(\frac{g(x)-g(a)}{(x-a)}\right)\right]$$ par réarrangement des termes.

Par hypothèse, f est dérivable en a, donc $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est un nombre, c'est le nombre dérivé $f'(a)$.

Par hypothèse, g est dérivable en a, donc $\lim_{x\to a}\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$ est un nombre, c'est le nombre dérivé $g'(a)$.

Puisque g est dérivable en a, elle est continue en a et donc $\lim_{x\to a} g(x) = g(a) \in \mathbb{R}$.

Puisque f est dérivable en a, en particulier le nombre $f(a)$ existe et donc $\lim_{x\to a} f(a) = f(a)$.

On peut donc décomposer la limite ci-dessus ainsi:

$$= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) \lim_{x\to a} g(x) + \lim_{x\to a} f(a) \lim_{x\to a}\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$$

$$= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$ qui est un nombre donc

$$= (fg)'(a)$$ le nombre dérivé existe.

Il suit de la dernière égalité, $f'(a)g(a) + f(a)g'(a) = (fg)'(a)$, que la fonction fg est dérivable en a et que la formule proposée en deuxième conclusion est vraie pour a. De plus, les calculs ci-dessus sont indépendants du choix de a. Ils sont valables pour tout $a \in I$. On conclut que fg est dérivable sur I et que $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ pour tout $x \in I$. □