Dérivée d'une fonction inverse

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème Inverse de fonction dérivable

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que f n'est jamais nulle sur I.

Si f est dérivable sur I

Alors 1°) la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I,

2°) $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}\ \forall x \in I.$

Démonstration : Soit $a \in I$.

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f}(x) - \frac{1}{f}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a}$$ par définition de la fonction $\frac{1}{f}$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(a)-f(x)}{f(x)f(a)} \cdot \frac{1}{(x-a)}\right)$$ en mettant les fractions au même dénominateur et en transformant la division en produit.

$$= \lim_{x\to a} \left(-\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{f(a)}\right)$$ par réarrangement des termes et mise en évidence de -1.

On a $\lim\limits_{x\to a}(-1) = -1 \in \mathbb{R}$.

Par hypothèse, f est dérivable en a, donc $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R}$.

Puisque f est dérivable sur I, elle est continue sur I et comme $f(x) \neq 0$ la fonction inverse $\frac{1}{f}$ est continue sur I, donc $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(a)} \in \mathbb{R}$.

Puisque f est définie sur I et qu'elle n'est jamais nulle, on a $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{f(a)} \in \mathbb{R}$.

On peut donc décomposer la limite ci-dessus ainsi:

$$= \lim_{x\to a}(-1) \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{f(a)}$$

$$= (-1) \cdot f'(a) \cdot \frac{1}{f(a)} \cdot \frac{1}{f(a)} = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$$ qui est un nombre donc

$$= \left(\frac{1}{f}\right)'(a)$$ le nombre dérivé existe.

Comme $-\dfrac{f'(a)}{f^2(a)} \in \mathbb{R}$ la limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \left(\frac{1}{f}\right)(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbb{R}$, on conclut que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en a et que $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a) = -\dfrac{f'(a)}{f^2(a)}$. Comme cette conclusion est indépendante du choix de $a \in I$, on peut généraliser ce résultat à I. On conclut que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur I et que $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$ pour tout $x \in I$. $\square$