Dérivée de la fonction cosinus

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème

Si f est la fonction cosinus, $f(x) = \cos(x)$

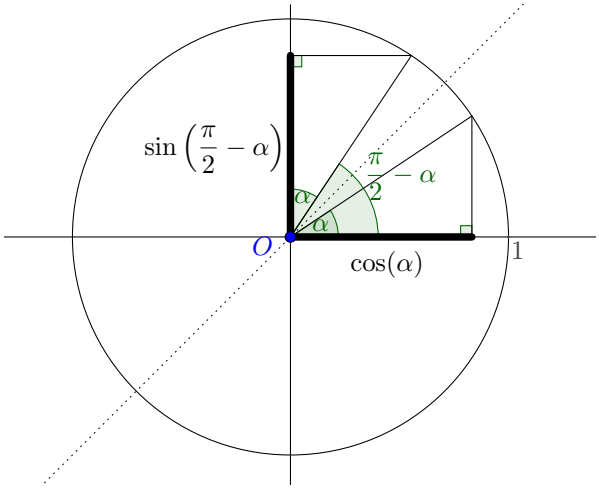
Alors 1°) f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$

2°) $f'(x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque: Pour procéder à la démonstration, on va recourir aux formules trigonométrique

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ et } \sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

qui sont vraies pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$



et qu'on ne démontre pas sur les autres quadrants du cercle trigonométrique.

Démonstration du théorème : En vertu de la première formule ci-dessus, comme la fonction sinus est dérivable, comme l'application affine $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ est dérivable et comme la composition de fonctions dérivables est dérivable il suit que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'autre part:

$$\begin{aligned}
(\cos(x))' &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' && \text{par l'application de la formule ci-dessus} \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' && \text{selon la règle de dérivation des fonctions composées} \\
&= \sin(x) \cdot (-1) && \text{selon la deuxième formule} \\
&= -\sin(x).
\end{aligned}$$

□