La dérivabilité en un point implique la continuité en un point

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Définition Une fonction f définie sur un intervalle I est continue en $x = a$ avec $a \in I$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition Une fonction f définie sur un intervalle I est dérivable en $x = a$ avec $a \in I$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et vaut un nombre.

Si ce nombre existe, on le note $f'(a)$.

Théorème Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

Si f est dérivable en a

Alors f est continue en a.

Démonstration du théorème :

On commence par récrire l'expression de la fonction f : $f(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a)$

Comme

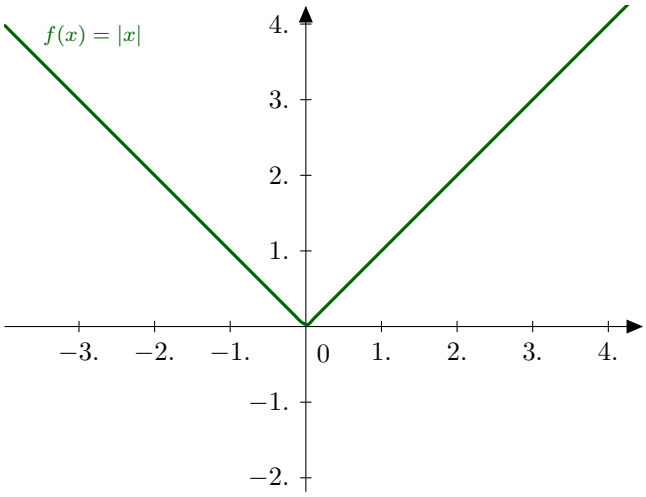
1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}$ par hypothèse,
2. $\lim\limits_{x \to a} (x - a) = (a - a) = 0$ par continuité de la fonction polynomiale $x \mapsto x - a$,
3. $\lim\limits_{x \to a} f(a) = f(a) \in \mathbb{R}$ puisque f étant définie en a, $f(a)$ est un nombre,

il suit

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a) \right) && \text{par réécriture} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} (x - a) + \lim_{x \to a} f(a) && \text{puisque chacune des limites existent} \\
&= f'(a) \cdot 0 + f(a) \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

Nous avons donc établit que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, et donc que f est donc continue en a. $\square$

Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse. La continuité en un point n'implique pas la dérivabilité en ce point. La fonction VALEUR ABSOLUE en est un contre-exemple.



En $a = 0$, la valeur absolue est continue en 0. En effet

1. $|0| = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0^-} |x| = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} |x|$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$
3. Comme $\lim\limits_{x\to 0}|x| = |0|$ la fonction VALEUR ABSOLUE est continue en 0.

Par contre, elle n'est pas dérivable en 0. En effet :

1. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$ et
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1.$
3. Comme ces deux limites sont différentes, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0}$ n'existe pas. Il suit que la fonction n'est pas dérivable en 0.