Critère du quotient de d'Alembert

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème Critère du quotient

Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ une série entière à termes positifs.

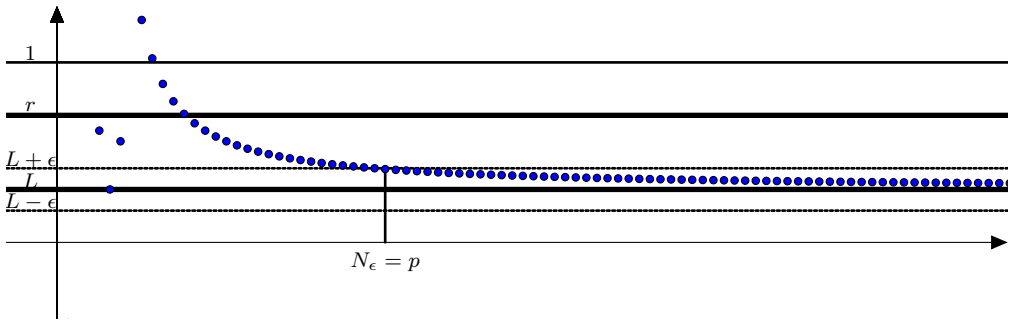
Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$ existe

Alors si $L < 1$ la série converge,
si $L > 1$ la série diverge.

Remarque : Si $L = 1$ ne critère ne permet pas d'apporter de conclusion.

Démonstration :
Cas $L < 1$:

Si $L < 1$ alors il existe un nombre réel r tel que $L < r < 1$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L < r$, il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r \quad \forall n \geq p$.
En effet, comme la suite converge, pour tout choix d'un nombre arbitrairement petit ϵ, il existe un rang N_ϵ, qui dépend du choix de ϵ, à partir duquel toutes les images de la suite sont proches d'au plus ϵ de la limite L. C'est la définition de la convergence. En particulier, si on choisit ϵ de sorte que $L + \epsilon < r$ on prendra pour p la valeur de N_ϵ.



Ainsi $u_{p+1} < r \cdot u_p$
$u_{p+2} < r \cdot u_{p+1} < r^2 \cdot u_p$
$u_{p+3} < r \cdot u_{p+2} < r^3 \cdot u_p$
$\vdots$

$$\begin{aligned}
\text{Il suit que } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{p-1} + u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots \\
&< u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{p-1} + u_p + r \cdot u_p + r^2 \cdot u_p + \cdots \\
&= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{p-1} + u_p(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots) \\
&\overset{0<r<1}{=} u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{p-1} + u_p \cdot \tfrac{1}{1-r} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

La série est à termes positifs et majorée par une série convergente, donc elle converge également.

Cas $L > 1$:

Si $L > 1$, il existe un rang $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \quad \forall n \geq p$. On a donc $u_{n+1} > u_n > 0 \quad \forall n \geq p$. Rappellons qu'un théorème affirme que si une série converge alors son terme général tend vers 0. Ici, par contraposée, puisque le terme général u_n ne tendant pas vers 0 le série diverge. $\square$