Comportement asymptotique des fonctions rationnelles

Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Définition On dit que deux fonctions f et g sont asymptotes l'une de l'autre en $+\infty$

si et seulement si $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$.

On dira que f admet une asymptote oblique
si g est une fonction affine c'est-à-dire si $g(x)=ax+b$,
et on dira que f admet une asymptote horizontale
si g est une fonction constante c'est-à-dire si $g(x)=b$.

Remarque : On peut définir de la même manière des asymptotes en $-\infty$.

Interprétation : Affirmer que $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ signifie que plus on prend des grands nombres, plus les fonctions f et g ont le même comportement en termes d'images : leurs images sont de plus en plus proches.

Théorème

Soit f une fraction rationnelle, c'est-à-dire que $f(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$
où $A(x)$ et $B(x)$ sont des polynômes.

Si Q est la fonction polynomiale pour laquelle $Q(x)$ est le quotient de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$

Alors f et la fonction polynomiale Q et sont asymptotes l'une de l'autre en $-\infty$ et $+\infty$.

Commentaire : Ce théorème permet, dans la cas des fractions rationnelles, de s'épargner le calcul d'une limite au profit d'une division euclidienne.

Démonstration du théorème : La division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ fournit les polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ pour lesquels

$$A(x)=Q(x)B(x)+R(x),\ \text{avec } deg(R)<deg(B).$$

Il suit que $\dfrac{A(x)}{B(x)}=\dfrac{Q(x)B(x)+R(x)}{B(x)}=\dfrac{Q(x)B(x)}{B(x)}+\dfrac{R(x)}{B(x)}=Q(x)+\dfrac{R(x)}{B(x)}$.

On conclut que $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-Q(x)]=\lim_{x\to+\infty}[Q(x)+\dfrac{R(x)}{B(x)}-Q(x)]=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{R(x)}{B(x)}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{R(x)}{B(x)}\overset{thm2}{=}0$ puisque $deg(R)<deg(B)$ on conclut que $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-Q(x)]=0$. □

Remarque : Une démonstration du même genre permet d'établir que la conclusion du théorème est aussi vraie en $-\infty$.

Théorème 2

Soit p et q deux fonctions polynomiales

Si $deg(p) < deg(q)$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$

Commentaire : Cette démonstration n'est pas demandée aux élèves des classes 3MA1 et 4MA1. Elle peut l'être par contre pour les classes 3MA2 et 4MA2.

Démonstration du théorème : Posons $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ avec n et m des entiers positifs ou nuls et $n < m$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \\
&= \frac{x^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{x^n} + \cdots + a_1\frac{x}{x^n} + a_0\frac{1}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m + b_{m-1}\frac{x^{m-1}}{x^m} + \cdots + b_1\frac{x}{x^m} + b_0\frac{1}{x^m}\right)} \\
&= \frac{\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right)}{x^{m-n}\left(b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \cdots + b_1\frac{1}{x^{m-1}} + b_0\frac{1}{x^m}\right)} \\
&= \frac{1}{x^{m-n}} \cdot \frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \cdots + b_1\frac{1}{x^{m-1}} + b_0\frac{1}{x^m}}
\end{aligned}$$

On a

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{m-n}} = 0,$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \cdots + b_1\frac{1}{x^{m-1}} + b_0\frac{1}{x^m}} = \dfrac{a_n}{b_m}$

Il suit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{m-n}} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \cdots + b_1\frac{1}{x^{m-1}} + b_0\frac{1}{x^m}} = 0 \cdot \frac{a_n}{b_m} = 0.$$

On montre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$ $\square$