Théorème des accroissements finis

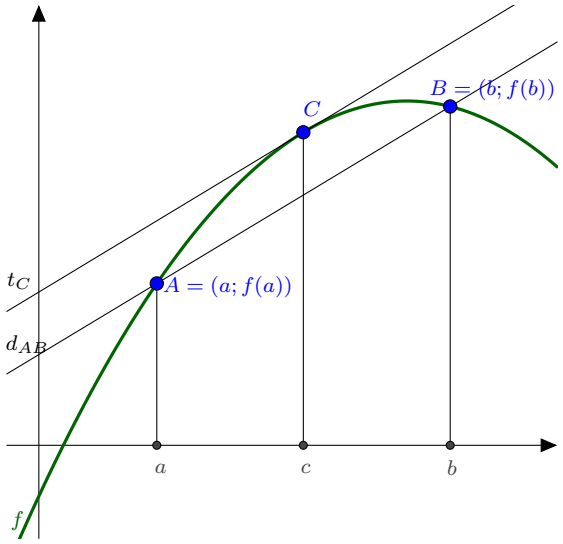
Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème Soit f une fonction.

Si f est dérivable sur $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$

Alors il existe au moins un $c \in]a;b[$ pour lequel $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Illsutration : Soit la droite d_{AB} sécante au graphe de f en A et B, le théorème affirme qu'il existe au moins un point C sur le graphe dont l'abscisse c est comprise entre a et b qui admet une tangente parallèle à la droite d_{AB}.



Démonstration du théorème : Soit d_{AB} la fonction dont le graphe est la sécante au graphe de f qui passe par A et B. La fonction d_{AB} est donc une fonction affine puisqu'elle est représentée par une droite. Elle est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée d'_{AB} est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ dont la valeur égale la pente de la droite qui passe par A et B :

$$d'_{AB}(x) = \frac{d_{AB}(b) - d_{AB}(a)}{b-a} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Puisque les graphes de f et d_{AB} se croisent en A et B on peut exprimer, à l'aide des images de a et b par f, le rapport $\dfrac{d_{AB}(b) - d_{AB}(a)}{b-a}$:

$$\frac{d_{AB}(b) - d_{AB}(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

On déduit que

$$d'_{AB}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Soit la fonction Φ définie comme la différence de f et d_{AB} : $\Phi(x) = f(x) - d_{AB}(x)$. La fonction Φ satisfait aux conditions du théorème de Rolle. En effet

1. Φ est dérivable sur $]a;b[$. En effet, d_{AB} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur $]a;b[$ en particulier. La fonction f est dérivable sur $]a;b[$ par hypothèse. Comme la somme de fonctions dérivables est également dérivable, il suit que Φ est dérivable sur $]a;b[$.
2. Φ est continue sur $[a;b]$. En effet, d_{AB} est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et sur $[a;b]$ en particulier. La fonction f est continue sur $[a;b]$ par hypothèse. Comme la somme de fonctions continues est également continue, il suit que Φ est continue sur $[a;b]$.
3. Puisque $f(a) = d_{AB}(a)$ il suit que $\Phi(a) = f(a) - d_{AB}(a) = 0$. De même, on trouve $\Phi(b) = 0$. Donc $\Phi(a) = \Phi(b)$.

Puisque Φ satisfait aux conditions du théorème de Rolle, il existe au moins un nombre $c \in]a;b[$ pour lequel $\Phi'(c) = 0$, ou encore $f'(c) - d'_{AB}(c) = 0$. On déduit que $f'(c) = d'_{AB}(c)$.
Comme il est établit que $d'_{AB}(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ on conclut qu'il existe bien au moins un nombre $c \in]a;b[$ pour lequel $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. $\square$