Formule de Héron

POLYC1 2021-2022

Contenu :

- Un peu d'histoire
- Révision périmètre et aire d'un triangle
- Démonstration illustrative de la formule
- Enoncé de la formule de Héron (avec exemples)
- Exercices pratiques



CFP Arts Genève
https://cfparts.ch/

Johann Sievering

v05

cc BY NC ND

OBJECTIFS du COURS



Un peu d'histoire

Révision périmètre et aire d'un triangle

Démonstration illustrative du théorème

Enoncé de la formule de Héron (avec exemples)

Exercices pratiques

Objectifs :

- Comprendre les principes de base de la Formule de Héron ;
- Être capable de calculer l'aire d'un triangle quelconque connaissant ses côtés ;
- Être capable de mettre en application de Formule de Héron.

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

UN PEU D'HISTOIRE



(cc) BY-NC-ND

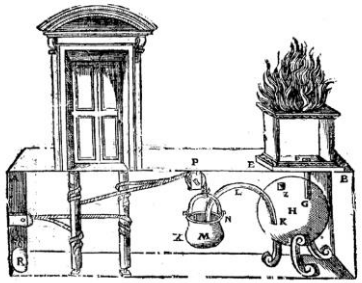
johann.sievering@edu.ge.ch

Héron



Source : Google Image

- **Héron d'Alexandrie** aurait vécu entre le Ier siècle av. J.-C. et apr. J.-C. Mais nous n'en avons aucune certitude.
- C'était un savant visionnaire, un inventeur, un mathématicien, un mécanicien et même un historien.
- Héron était en avance sur son temps, entre autres, il a mis au point une machine à vapeur de l'Antiquité : « l'éolipyle ». (Plus de 1'500 ans avant James Watt).
- Sont attribuées à Héron d'Alexandrie la célèbre formule mathématique permettant de calculer l'aire d'un triangle sans utiliser de hauteur *(formule de Héron)*, ainsi qu'une méthode permettant d'approcher la racine carrée d'un nombre quelconque avec une approche récursive *(méthode de Héron)*.
- Cependant, la formule avait déjà été prouvée par Archimède et la méthode était déjà connue des Babyloniens.



Source : Google Image

«Pneumatique - A38»
Ouverture automatique des portes du temple.



Source : Wikipédia

Eolipyle
La vapeur peut faire tourner la sphère jusqu'à une vitesse d'environ 1'500 tours par minute.

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

PÉRIMÈTRE ET AIRE D'UN TRIANGLE



(cc) BY-NC-ND

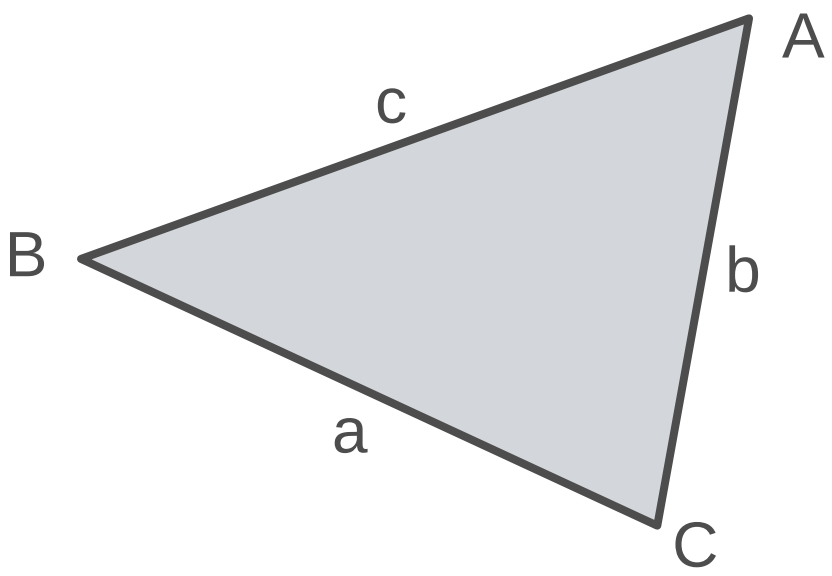
johann.sievering@edu.ge.ch

Périmètre d'un triangle

Rappel : pour calculer le périmètre d'un triangle, il faut connaître :

- **La longueur des trois côtés.**

Un triangle a 3 côtés.



Triangle scalène (quelconque)

$$P = a + b + c$$

Triangle isocèle

$$P = 2 * m + c$$

$$m = a = b$$

Triangle équilatéral

$$P = 3 * n$$

$$n = a = b = c$$

(cc) BY-NC-ND

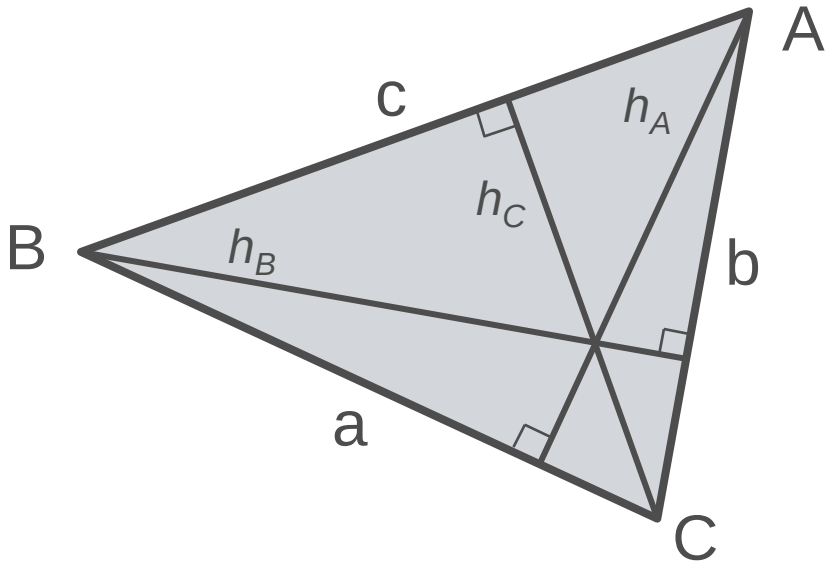
johann.sievering@edu.ge.ch

Aire d'un triangle

Rappel à pour calculer l'aire d'un triangle, il faut connaître :

- **La mesure de la base ;**
- **La mesure de la hauteur**.

Un triangle a 3 côtés, qui peuvent chacun prendre le rôle de base, et a 3 hauteurs.



Triangle scalène (quelconque)

$$A = \frac{b * h}{2}$$

Triangle isocèle

$$A = \frac{1}{2} * c * \sqrt{m^2 - \frac{c^2}{4}}$$

$$m = a = b$$

Triangle équilatéral

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} n^2$$

$$n = a = b = c$$

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

DÉMONSTRATION ILLUSTRATIVE DU THÉORÈME



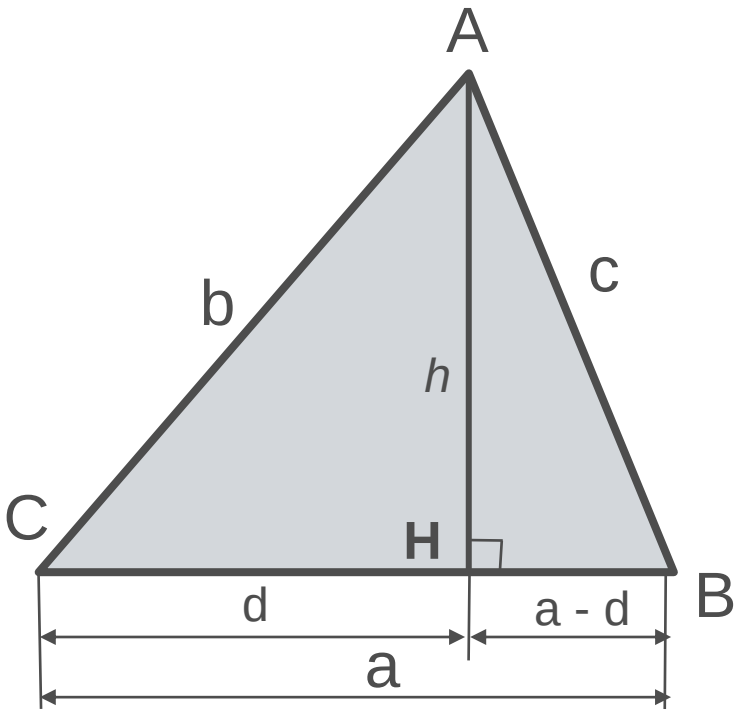
(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Etapes de démonstration

Remarque : cette démonstration de la formule de Héron n'est pas unique.

Soyez curieux !



Pythagore sur triangle AHC et AHB

$$b^2 - d^2 = h^2 = c^2 - (a-d)^2$$

Il vient :

$$d = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

Alors :

Nous posons :

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Formule de Héron:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

ENONCÉ DE LA FORMULE DE HÉRON



(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Formule de Héron

La formule de Héron permet de calculer l'aire d'un triangle quelconque sans utiliser de hauteur

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

A : aire du triangle

Avec :

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

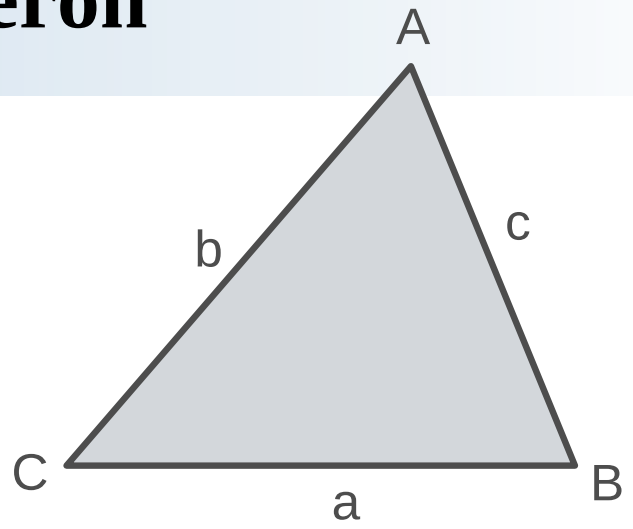
p : demi-périmètre du triangle

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exemple : Formule de Héron

a = 80 cm
b = 90 cm
c = 40 cm



Nous connaissons les longueurs des 3 côtés et nous cherchons l'aire (A)

→ Il est possible d'utiliser le Formule de Héron

Calcul du demi-périmètre : $p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(80 + 90 + 40) = 105\ cm$

Calcul de l'aire du triangle :

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{105(105-80)(105-90)(105-40)} = 1599{,}8\ cm^2 \approx \mathbf{1600\ cm^2}$$

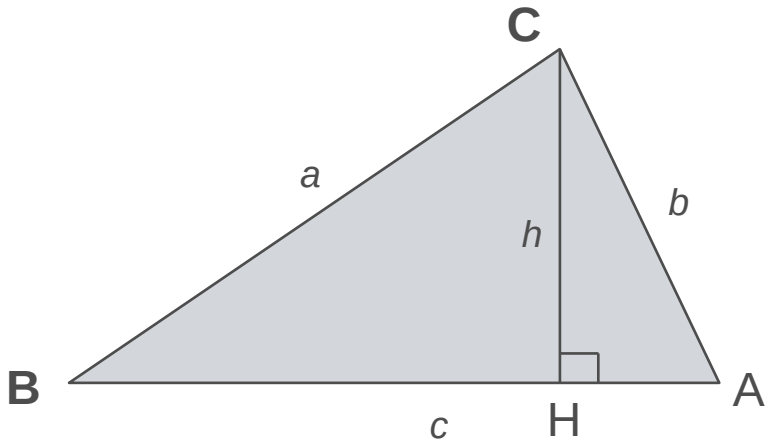
(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Est-ce que cela fonctionne vraiment ?

Nous allons calculer l'aire d'un triangle avec sa hauteur et avec Héron :

a = 37 cm
b = 13 cm
c = 40 cm
h =12 cm



Calcul avec la hauteur : $A = \frac{b * h}{2} = \frac{40 * 12}{2} = \mathbf{240\ cm^2}$

Calcul avec la formule de Héron :

Calcul du demi-périmètre : $p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(37 + 13 + 40) = 45\ cm$

Calcul de l'aire du triangle :

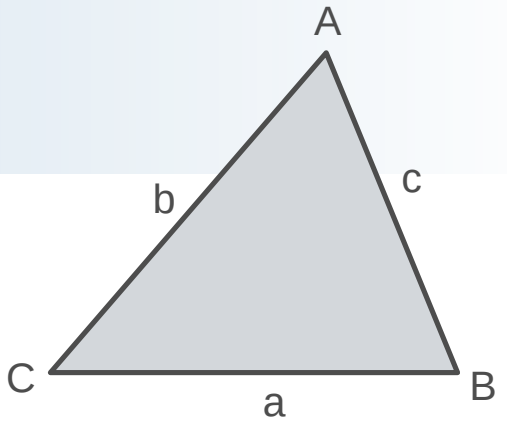
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{45(45-37)(45-13)(45-40)} = \mathbf{240\ cm^2}$$

Ca marche !!

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exercices : Formule de Héron



a = 3 [m], b = 4 [m], c = 5 [m]

$A = 6\ [m^2]$

---

a = 7 [dm], b = 24 [dm], c = 25 [dm]

$A = 84\ [dm^2]$

---

a = 65 [mm], b = 72 [mm], c = 97 [mm]

$A = 2'340\ [mm^2]$

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

EXERCICES

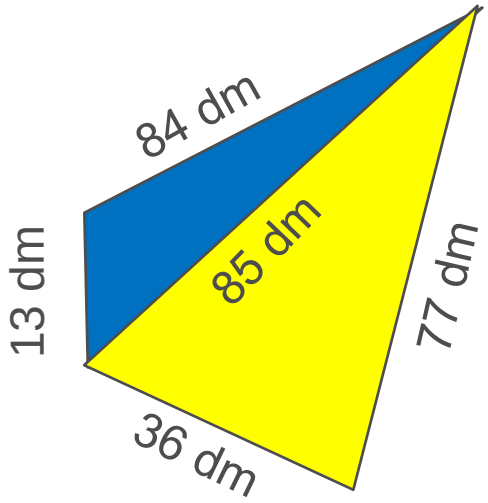


(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

« Double bases »

Vous avez relevé des mesures sur le terrain et vous avez fait le croquis ci-dessous.



Quelle est l'aire du terrain ?

Réponse au dixième en **[dm²]** et en **[m²].**

R: 1'932,0 [dm²] / 19,3 [m²]

(cc) BY-NC-ND

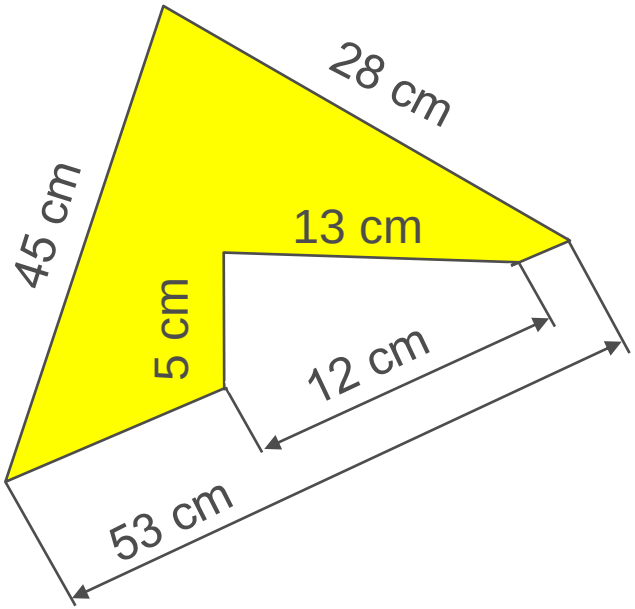
johann.sievering@edu.ge.ch

Manque un bout

Vous sortez du stock de bois la planche ci-dessous dont une partie a déjà été sciée.

Quelle est l'aire de la planche (une seule face) ?

Réponse à l'unité en **[cm²].**



R: 600 [cm²]

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

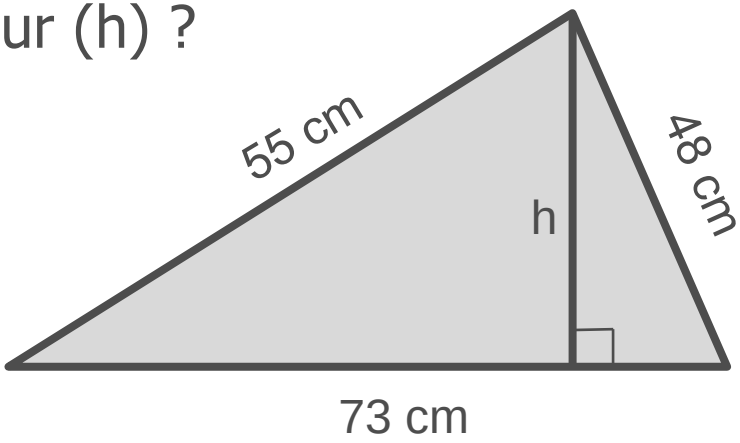
Prendre de la hauteur

Vous avez un plan avec le détail présenté ci-dessous.

Vous souhaitez calculer la hauteur (h).

Quelle est la longueur de la hauteur (h) ?

Réponse au dixième en **[cm].**



R: 36,2 [cm]

(cc) BY-NC-ND

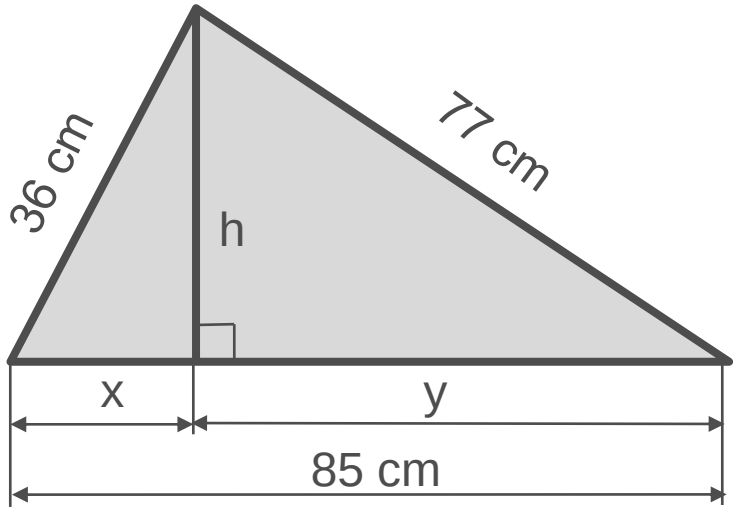
johann.sievering@edu.ge.ch

Héron et …

Vous êtes entrain de construire un meuble. Vous avez repéré les mesures suivantes sur le croquis. Mais il vous manque les données x et y.

Calculer x et y?

Réponse au dixième en **[cm].**



R: x: 15.3 [cm] / y: 69,7 [cm] (« preuve » : 15,3 + 69,6 = 85)

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch



QUESTIONS / RÉPONSES ?

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch