Théorème de Thalès

POLYC1 2021-2022

Contenu :

- Un peu d'histoire
- Révision triangles semblables
- Révision types d'angles
- Démonstration illustrative du théorème
- Enoncé du théorème de Thalès (avec exemples)
- Enoncés de la réciproque et de la contraposée
- Exercices pratiques



CFP Arts Genève
https://cfparts.ch/

Johann Sievering

v05

CC BY NC ND

OBJECTIFS du COURS





Un peu d'histoire

Révision types d'angles

Révision triangles semblables

Démonstration illustrative du théorème

Enoncé du théorème de Thalès (avec exemples)

Enoncés de la réciproque et de la contraposée (avec exemples)

Exercices pratiques

Objectifs :

- Comprendre les principes de base du théorème de Thalès ;
- Être capable de calculer la longueur d'un segment connaissant les longueurs de trois autres segments ;
- Être capable de mettre en application de théorème de Thalès ;
- Être capable de mettre en application la réciproque et la contraposée de théorème ;
- Être capable de résoudre des problèmes métier impliquant des triangles semblables.

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

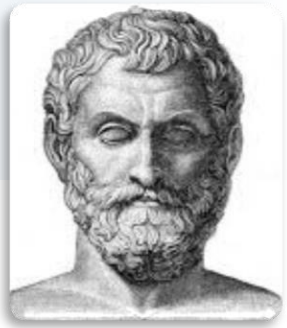
UN PEU D'HISTOIRE



(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Thalès



Source : Wikipédia

- **Thalès de Milet** né vers **de 625 av. J.-C.** en Asie Mineure (actuelle Turquie). Décédé vers l'an **547 av. J.-C.**
- C'était un philosophe, un ingénieur, un scientifique, un mathématicien et un homme d'état. Il s'intéressait particulièrement à l'astronomie ;
- Thalès était un savant universel s'intéressant à tous les domaines, il fut un des sept sages. Sa manière d'analyser les situations et les problèmes posés fit de lui un des précurseurs de la démarche scientifique moderne.
- Il était passionné de gymnastique et fut retrouvé mort déshydraté sur les gradins.
- Il aurait fait un séjour en Egypte où il aurait calculé la hauteur de la grande pyramide Kheops (fait connu jusqu'à nos jours). Il aurait prédit une éclipse et établi le célèbre théorème de Thalès.

(Il est à noter que dans d'autres langues ce théorème est connu sous d'autres noms : en anglais, **«intercept theorem»** (théorème d'interception), en allemand, **«Strahlensatz»** (théorème des rayons)**.**

Citations du célèbre calcul de la hauteur de la pyramide Kheops :

Le théorème :

« Le rapport que j'entretiens avec mon ombre est le même que celui que la pyramide entretient avec la sienne »

Application du théorème :

« A l'instant où mon ombre sera égale à ma taille, l'ombre de la pyramide sera égale à sa hauteur »



Source : Google Image

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

TYPES D'ANGLES

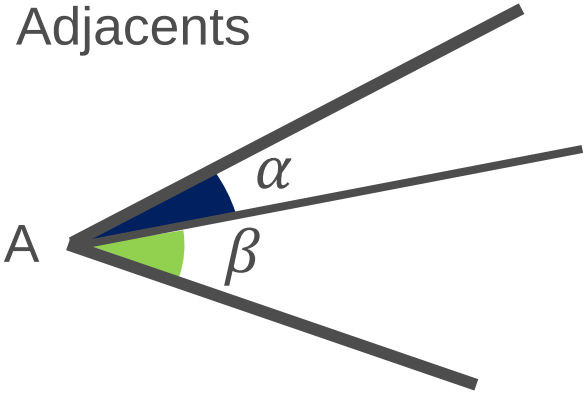


(cc) BY-NC-ND

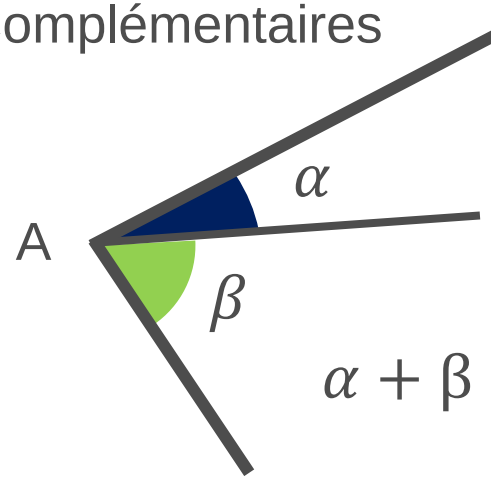
johann.sievering@edu.ge.ch

Adjacents, complémentaires, supplémentaires, opposés par le sommet

Adjacents

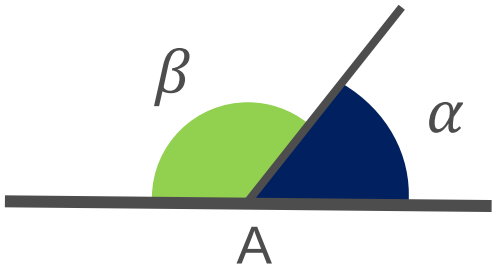


Complémentaires



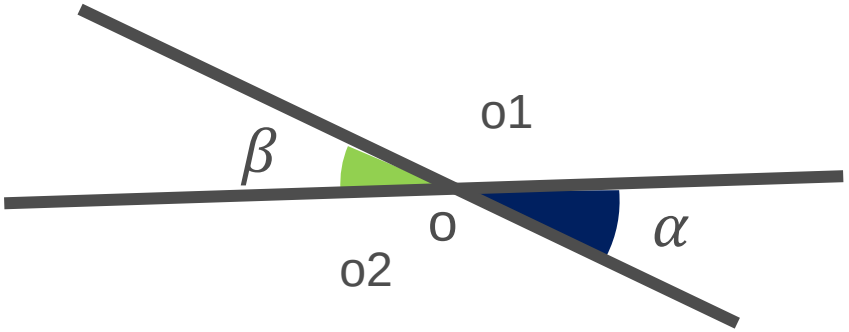
$\alpha + \beta = 90°$

Supplémentaires



$\alpha + \beta = 180°$

Opposés par le sommet



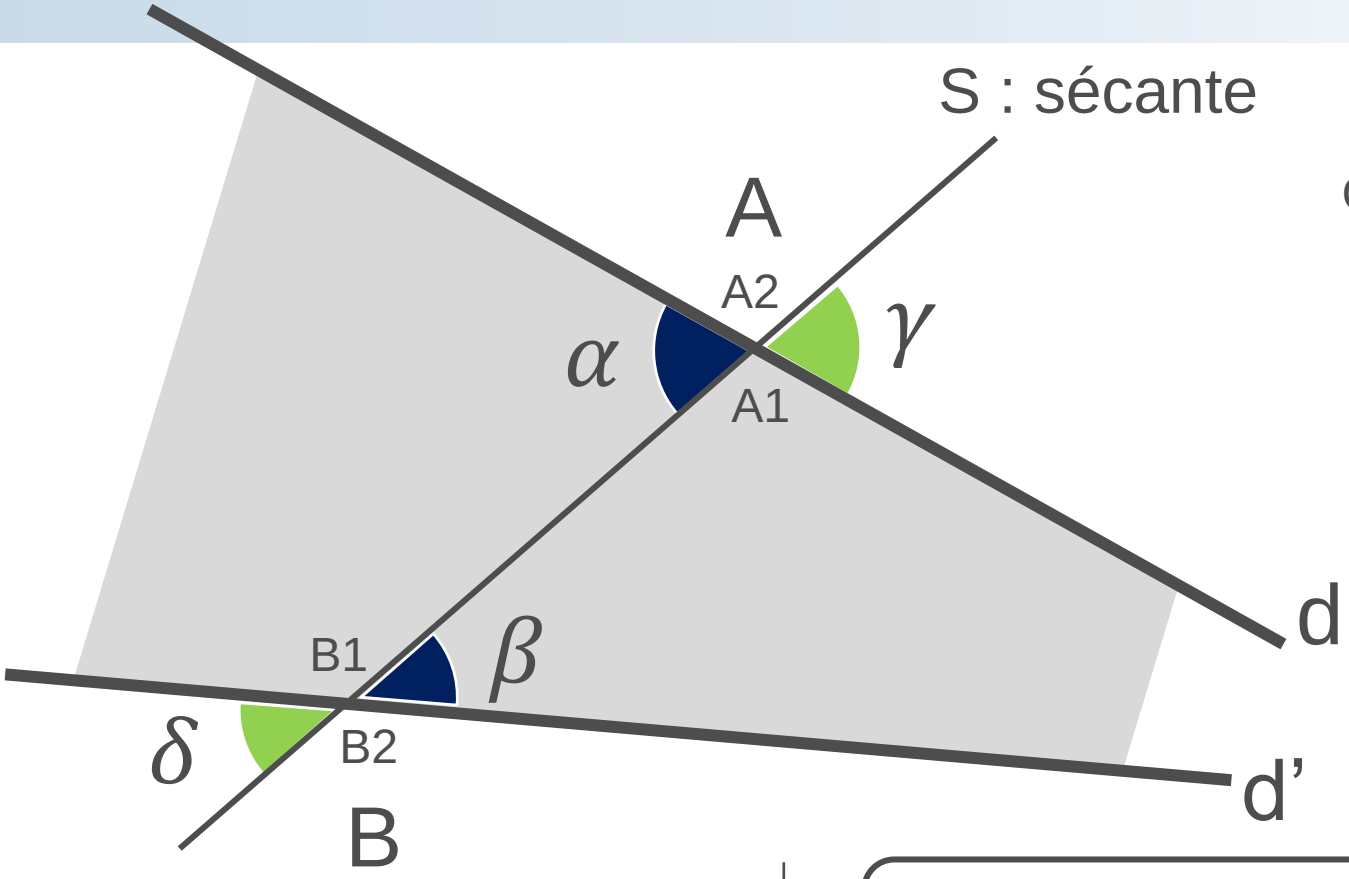
$\alpha = \beta$

(o1 = o2)

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Alternes-internes, alternes-externes, correspondants



Correspondants :

α et δ

β et γ

$A1$ et $B2$

$A2$ et $B1$

Alternes-internes : α et β

(également A1 et B1)

Alternes-externes : γet δ

(également A2 et B2)

Si **d** est **parallèle** à **d'** ($d \parallel d'$) alors :

$\alpha = \beta$ et $\gamma = \delta$

SI $\alpha = \beta$ OU $\gamma = \delta$:

alors **d** est **parallèle** à **d'** ($d \parallel d'$)

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

TRIANGLES SEMBLABLES



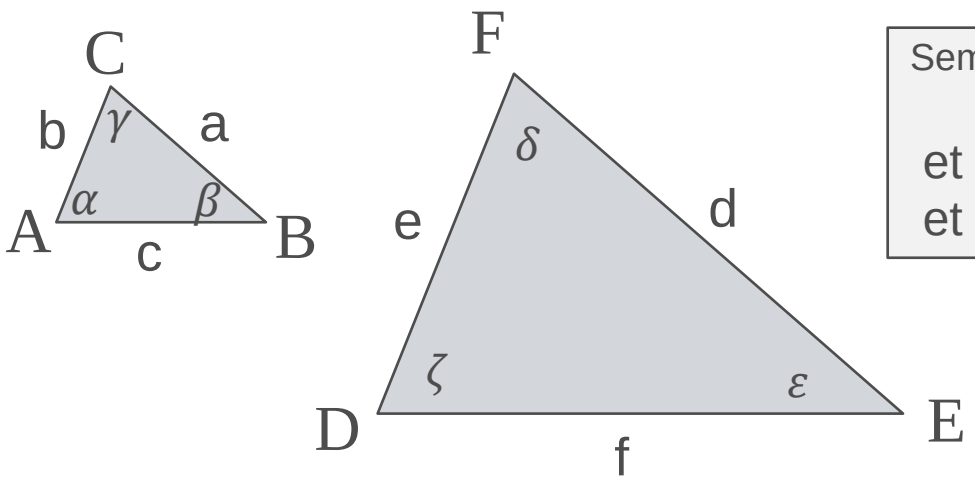
(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Définitions

Deux triangles ABC et DEF sont dits <u>semblables</u> si les angles du triangle ABC ont les mêmes mesures que ceux du triangle DEF.

En géométrie euclidienne (dans le plan).



Semblable si :

$\alpha = \delta$
et $\beta = \varepsilon$
et $\gamma = \zeta$

Remarque:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\delta + \varepsilon + \zeta = 180°$

Donc il suffit de **vérifier <u>l'égalité de deux angles</u>** pour assurer que les trois angles ont **tous les mêmes mesures**.

Deux triangles ABC et DEF sont dits <u>semblables</u> si les côtés homologues ont des longueurs proportionnelles.

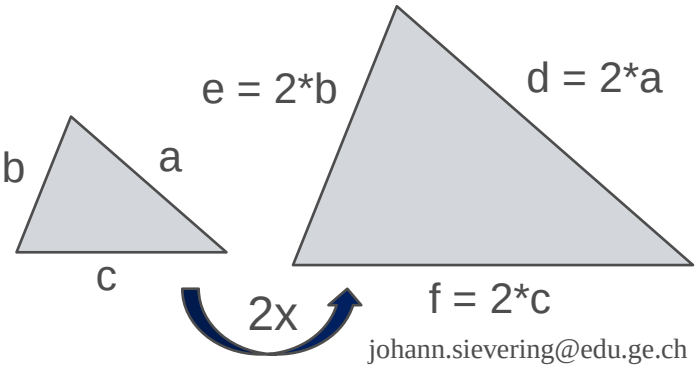
En géométrie euclidienne (dans le plan).

Semblable si :

$d = k * a$
et $e = k * b$
et $f = k * c$

k est le facteur de proportionnalité

Pensez à un zoom qui agrandirait (k>1) ou réduirait (k<1) le triangle.

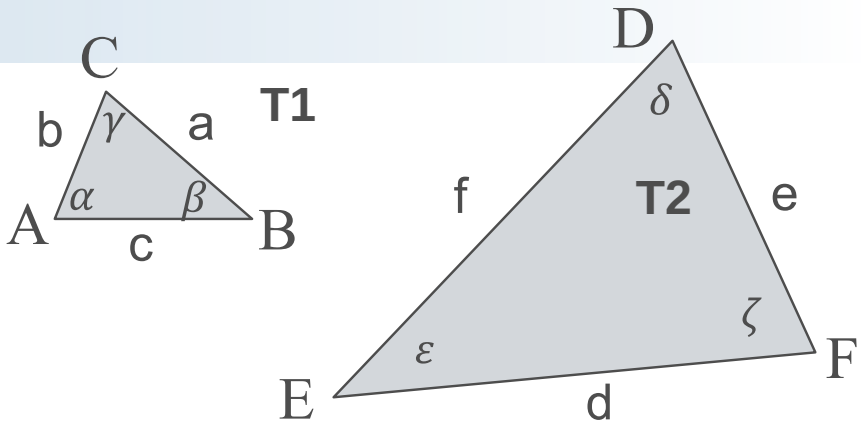


(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exercices : triangles semblables

Est-ce que les triangles T1 et T2 sont semblables ?



Exercice 1 :

$\alpha = 30°$ $\delta = 30°$
$\beta = 45°$ $\varepsilon = 45°$
$\gamma = 105°$ $\zeta = 105°$

R: OUI

Exercice 2 :

$\alpha = 60°$ $\varepsilon = 70°$
$\beta = 70°$ $\zeta = 50°$

R: OUI

Exercice 3 :

$\alpha = 30°$ $\delta = 30°$
$\gamma = 105°$ $\varepsilon = 60°$
$\zeta = 90°$

R: NON

Exercice 4 :

$a = 10$ $d = 50$
$b = 45$ $e = 225$
$c = 50$ $f = 250$

R: OUI

Exercice 5 :

$a = 60$ $d = 180$
$b = 22$ $e = 64$
$c = 40$ $f = 120$

R: NON

Exercice 6 :

$a = 70$ $d = 140$ $\beta = 75°$
$c = 80$ $f = 160$ $\varepsilon = 75°$

R: OUI

Exercice 7 :

$a = 10$ $d = 10$
$c = 20$ $f = 20$

R: impossible à déterminer

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

DÉMONSTRATION ILLUSTRATIVE DU THÉORÈME



(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

1) Lemme : aire d'un triangle

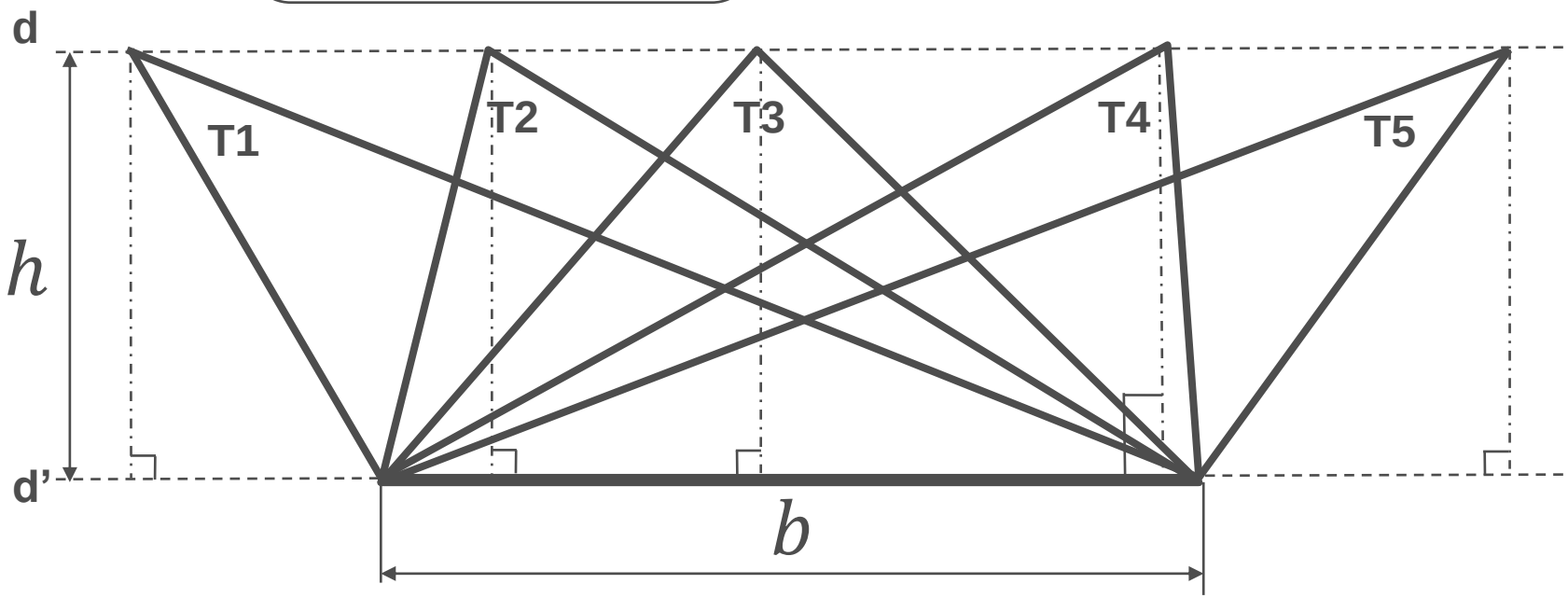
Remarque : cette démonstration du théorème de Thalès n'est pas unique.

Soyez curieux !

Rappel :

$$A = \frac{b * h}{2}$$

Pour calculer **l'aire d'un triangle**, il faut la mesure de l'un des 3 **côtés** du triangle (base : b) et la mesure de la **hauteur** (h) relative à ce côté pris pour base.



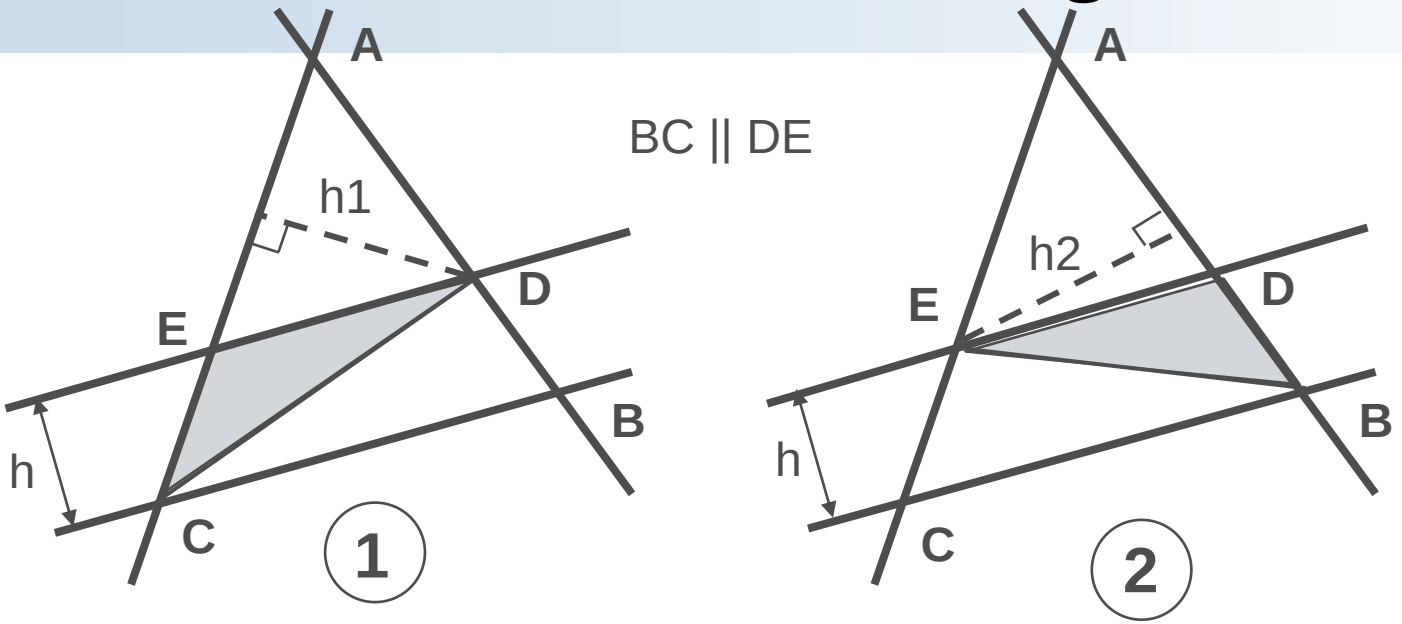
$$A_{T1} = A_{T2} = A_{T3} = A_{T4} = A_{T5}$$

En effet : tous les triangles ont la **même base** et la **même hauteur** (d || d').

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

2) Démonstration dans un triangle



1) **Aires CDE (1) = Aire BDE (2)** : car même hauteur (h) et même base BC.

2) Il est possible d'ajouter la même Aire ADE aux deux triangles CDE (1) et BDE (2).
Nous obtenons **Aire ADC (1) = Aire ABE (2)** *(nous avons ajouté la même quantité)*.

3) On en déduit : $\frac{Aire\ ADE}{Aire\ ACD}^{(1)} = \frac{Aire\ ADE}{Aire\ ABE}^{(2)}$

4) Avec h1 hauteur de ACD et h2 hauteur de ABE : $\frac{Aire\ ADE}{Aire\ ACD}^{(1)} = \frac{\frac{AE * h1}{2}}{\frac{AC * h1}{2}} = \frac{AE}{AC}$ et $\frac{Aire\ ADE}{Aire\ ABE}^{(2)} = \frac{\frac{AD * h2}{2}}{\frac{AB * h2}{2}} = \frac{AD}{AB}$

5) Et donc : $\boldsymbol{\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}}$

6) Il est ensuite possible de démonter : $\boldsymbol{\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}}$

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

ENONCÉ DU THÉORÈME DE THALÈS

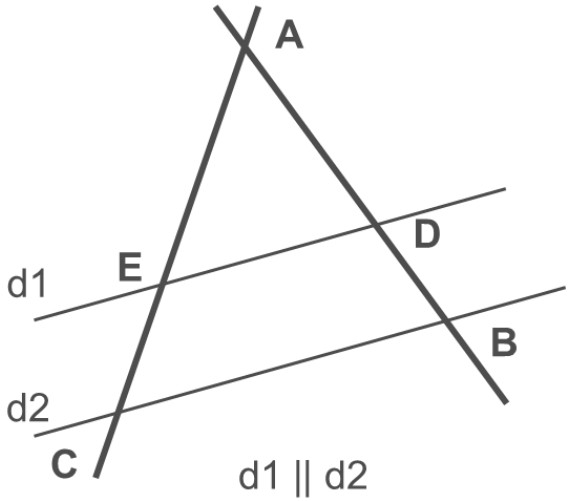


(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

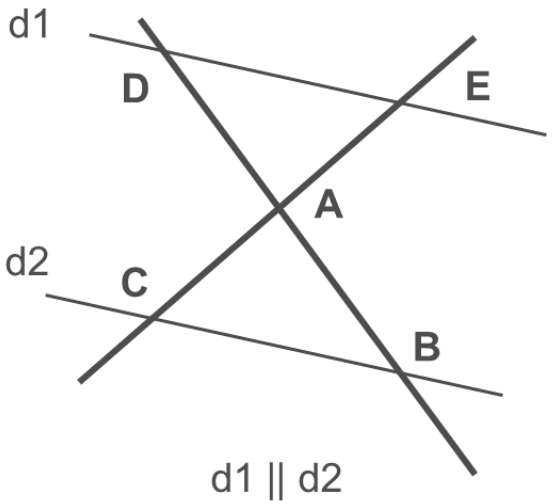
Théorème de Thalès

En présence de **parallélisme**, le théorème de Thalès permet de calculer des **rapports de longueurs**.



d1 || d2

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$



d1 || d2



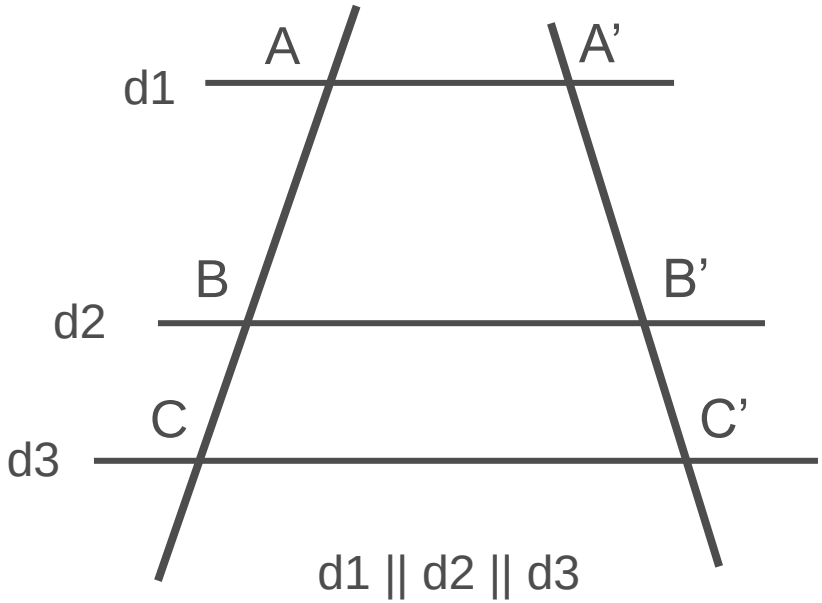
Il est très important de vérifier que **d1 || d2**.

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Généralisation du théorème de Thalès

Il est possible de trouver des rapports lorsque l'on a **plusieurs droites parallèles** et **deux droites sécantes** (prolongement du théorème de Thalès).



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

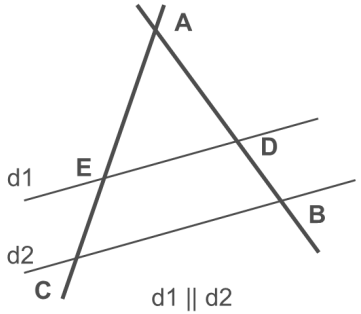
Il est très important de vérifier que **d1 || d2 || d3**.

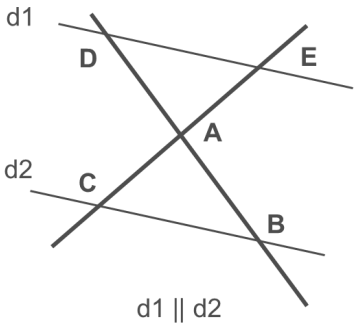
(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Formules du théorème de Thalès

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$





Rappel :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Je cherche **a** : $b * \frac{a}{b} = b * \frac{c}{d}$ Il vient : $a = \frac{b * c}{d}$

Transformations :

$AE = \frac{AC * AD}{AB}$ $AC = \frac{AB * AE}{AD}$ $AD = \frac{AB * AE}{AC}$ $AB = \frac{AC * AD}{AE}$

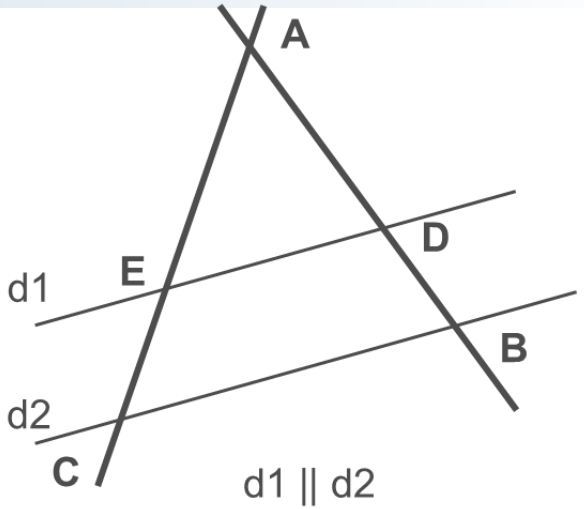
Etc.

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exemple : théorème de Thalès

AB = 15 cm
AD = 10 cm
AC = 21 cm
AE = ?



Soit d1 || d2

→ Il est possible d'utiliser le théorème de Thalès

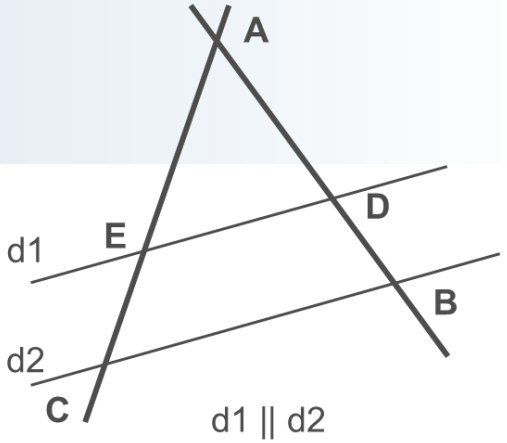
Je cherche AE : $\boldsymbol{AE = \frac{AC * AD}{AB}}$

$$\boldsymbol{AE = \frac{AC * AD}{AB} = \frac{21 * 10}{15} = \frac{210}{15} = 14\ cm}$$

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exercices : théorème de Thalès



AE = 8 [dm], AC = 12 [dm]
AD = 10[dm], AB = ?

AB = 15 [dm]

AC = 20 [mm], AE = 10 [mm]
BC = 30[mm], DE = ?

DE = 15 [mm]

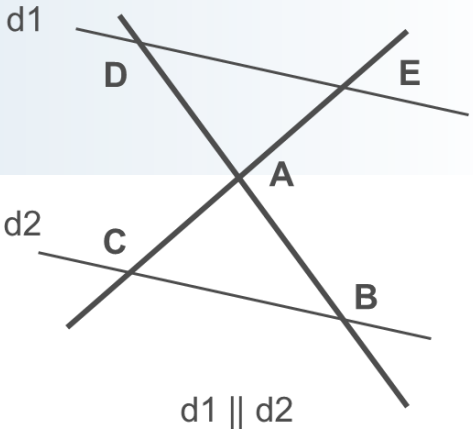
AE = 20 [m], EC = 10 [m]
AB = 30[m], AD = ?

AD = 20 [m]

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exercices : théorème de Thalès



AC = 5 [cm], AE = 10 [cm]
AB= 15 [cm], AD = ?

AD = 30 [cm]

BC = 30 [dm], AB = 15 [dm]
AD= 10 [dm], DE = ?

DE = 10 [dm]

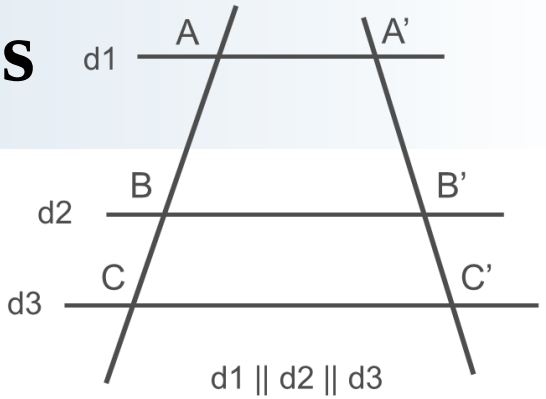
BD = 40 [km], AD = 20 [km]
DE= 10 [km], BC = ?

BC = 10 [km]

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exercices : théorème de Thalès



AB = 10 [m], BC = 5 [m]
A'B'= 10 [m], B'C' = ?

B'C' = 5 [m]

AB = 10 [cm], AC = 15 [cm]
A'B'= 12 [cm], A'C' = ?

A'C' = 18 [cm]

AC = 50 [dm], BC = 30 [dm]
A'B'= 20 [dm], B'C' = ?

b = 30 [dm]

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

ENONCÉS DE LA RÉCIPROQUE ET DE LA CONTRAPOSÉE

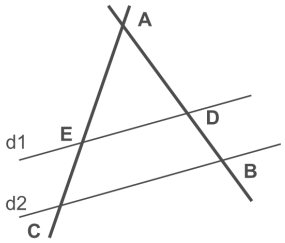


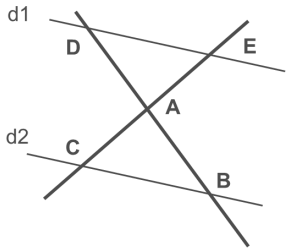
(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Réciproque du théorème de Thalès

S'il est possible d'établir l'égalité de deux rapports
alors d1 et d2 sont parallèles.





SI

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \quad \text{ou} \quad \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{ou} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

! Les points étant disposés comme dans le croquis !

alors

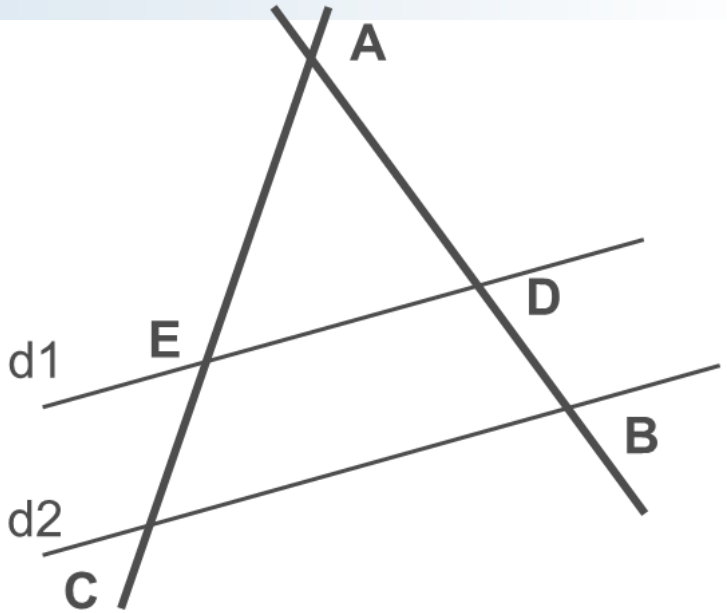
d1 est parallèle à d2 (d1 // d2)

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exercices : réciproque du théorème de Thalès

AB = 100 cm
AD = 60 cm
AC = 120 cm
AE = 72 cm



Est-ce que d1 est parallèle à d2 ?

Il faut vérifier : $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$

1. $\frac{AE}{AC} = \frac{72}{120} = \frac{6}{10} = 0.6$
2. $\frac{AD}{AB} = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = 0.6$
3. $0.6 = 0.6 \Rightarrow d1 \parallel d2$
4. On peut conclure que **d1 est parallèle à d2**

(cc) BY-NC-ND

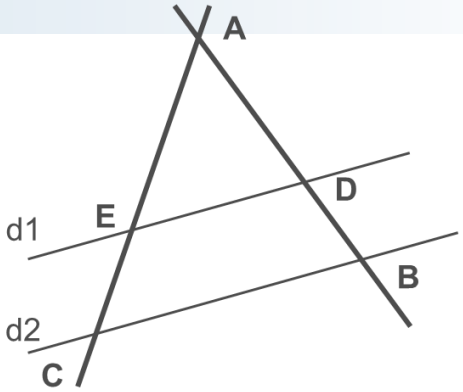
johann.sievering@edu.ge.ch

Exemple : réciproque du théorème de Thalès

Est-ce que d1 || d2 ?

AE = 10 [cm], AC = 30 [cm]

AD = 10 [cm], AB = 30 [cm]



oui

Est-ce que d1 || d2 ?

AE = 25 [m], CE = 5 [m]

DE = 20 [m], BC = 24 [m]

oui

Est-ce que d1 || d2 ?

BC = 80 [dm], DE = 40 [dm]

AD= 20 [dm], BD = 30 [dm]

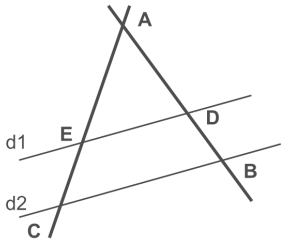
non

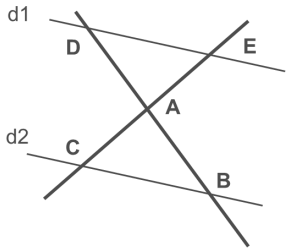
(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Contraposée du théorème de Thalès

Si une égalité entre deux rapports n'est pas vérifiée,
alors d1 et d2 ne sont pas parallèles.





Si

$$\frac{AE}{AC} \neq \frac{AD}{AB} \quad \text{ou} \quad \frac{AE}{AC} \neq \frac{DE}{BC} \quad \text{ou} \quad \frac{AD}{AB} \neq \frac{DE}{BC}$$

! Les points étant disposés comme dans le croquis !

alors

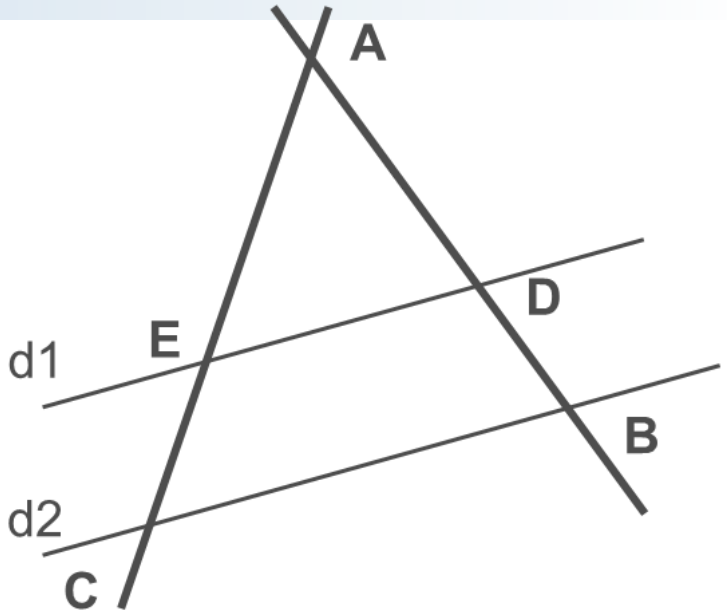
d1 n'est pas parallèle à d2 (d1 # d2)

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exercices : contraposée du théorème de Thalès

AB = 70 cm
AD = 40 cm
AC = 80 cm
AE = 40 cm



Est-ce que d1 est parallèle à d2 ?

Il faut vérifier : $\frac{AE}{AC} \neq \frac{AD}{AB}$

1. $\frac{AE}{AC} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} = 0.50$
2. $\frac{AD}{AB} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7} = 0.57$
3. $0.50 \neq 0.57 \Rightarrow d1 \# d2$
4. On peut conclure que **d1 n'est pas parallèle à d2**

(cc) BY-NC-ND

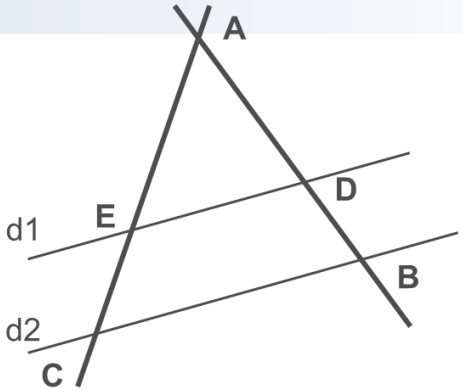
johann.sievering@edu.ge.ch

Exemple : contraposée du théorème de Thalès

Est-ce que d1 # d2 (ne sont pas parallèles) ?

AE = 30 [cm], AC = 40 [cm]

AD = 30 [cm], AB = 40 [cm]



non : d1 et d2 sont parallèles

Est-ce que d1 # d2 (ne sont pas parallèles) ?

BC = 80 [dm], DE = 40 [dm]

AD= 20 [dm], BD = 10 [dm]

non : d1 et d2 ne sont pas parallèles

Est-ce que d1 # d2 (ne sont pas parallèles) ?

AE = 20 [m], CE = 20 [m]

DE = 30 [m], BC = 60 [m]

non : d1 et d2 sont parallèles

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

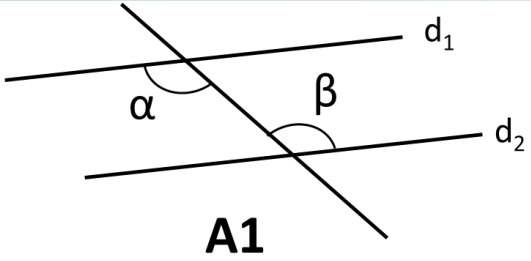
EXERCICES



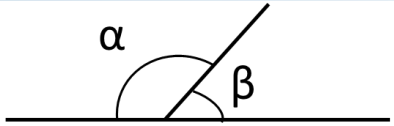
(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

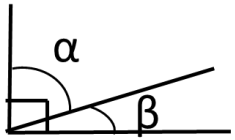
Types d'angles



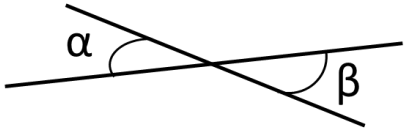
A1



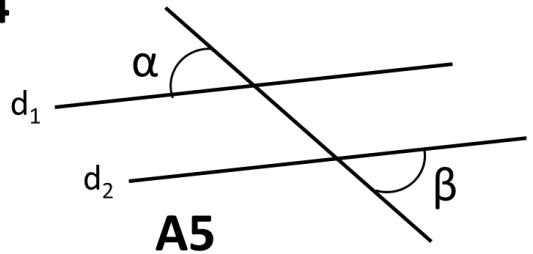
A2



A4



A3



A5

Reconnaitre les types d'angles.
Écrire le nom de l'angle (A1 à A5) correspondant à son type :

Angles ALTERNES-INTERNES : ……

Angles ALTERNES-EXTERNES : ……..

Angles OPPOSES PAR LE SOMMET : …….

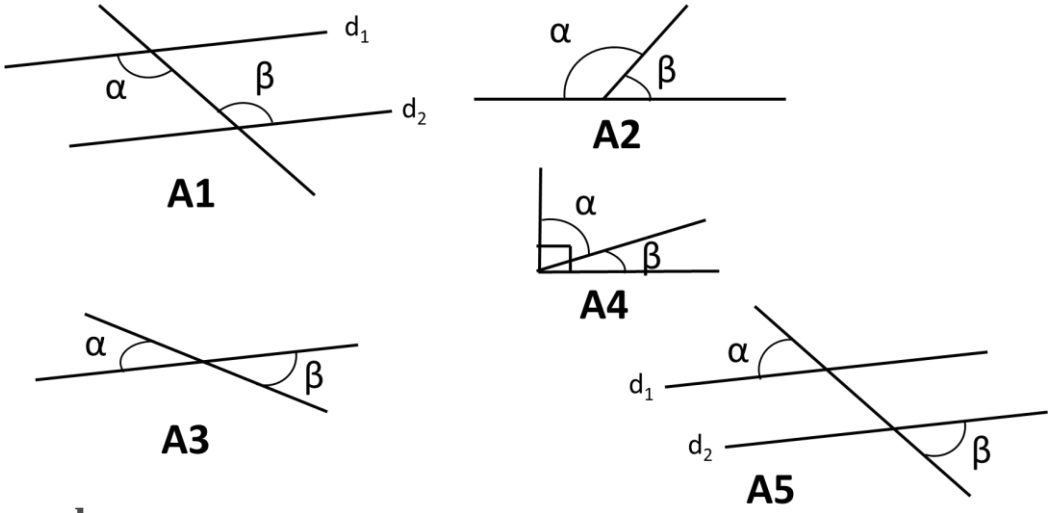
Angles SUPPLÉMENTAIRES : ……

Angles COMPLÉMENTAIRES : ……..

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Vrai ou faux ?



Propriétés des angles.

Indiquez si les propositions sont vraies ou fausses.

Les angles sont ceux représentés ci-dessus (A1 à A5).

- ○ VRAI / ○ FAUX A1 : si d_1 est parallèle à d_2, alors $\alpha = \beta$
- ○ VRAI / ○ FAUX A2 : $\alpha = 180° + \beta$
- ○ VRAI / ○ FAUX A3 : $\alpha = \beta$
- ○ VRAI / ○ FAUX A4 : $\alpha = 90° - \beta$
- ○ VRAI / ○ FAUX A5 : si d_1 est parallèle à d_2, alors $\alpha = \beta$

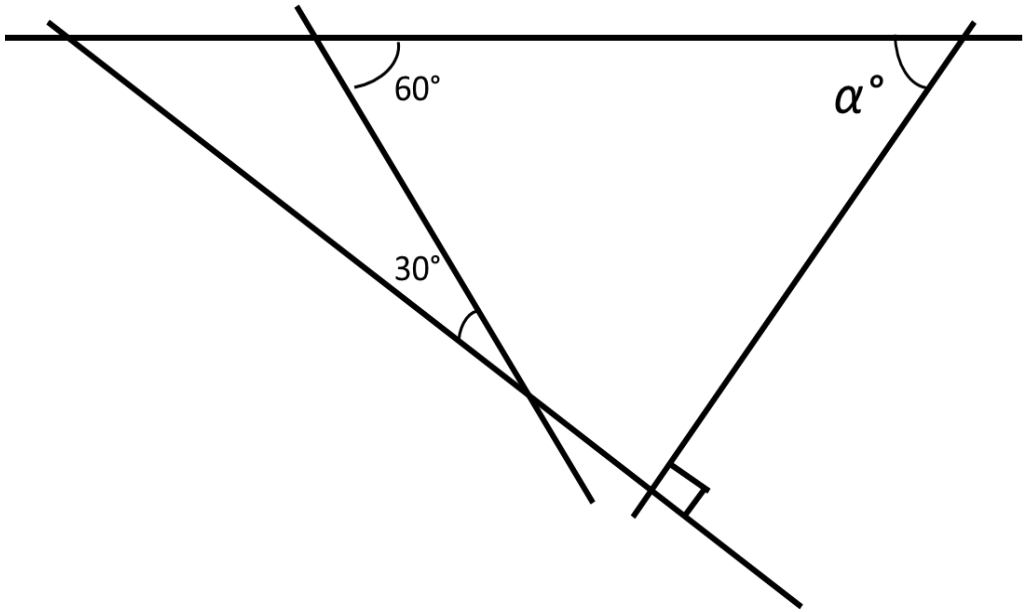
(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Quel angle ?

Vous avez un plan avec les segments de droites ci-dessous.

Vous devez déterminer l'angle α.



R:

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

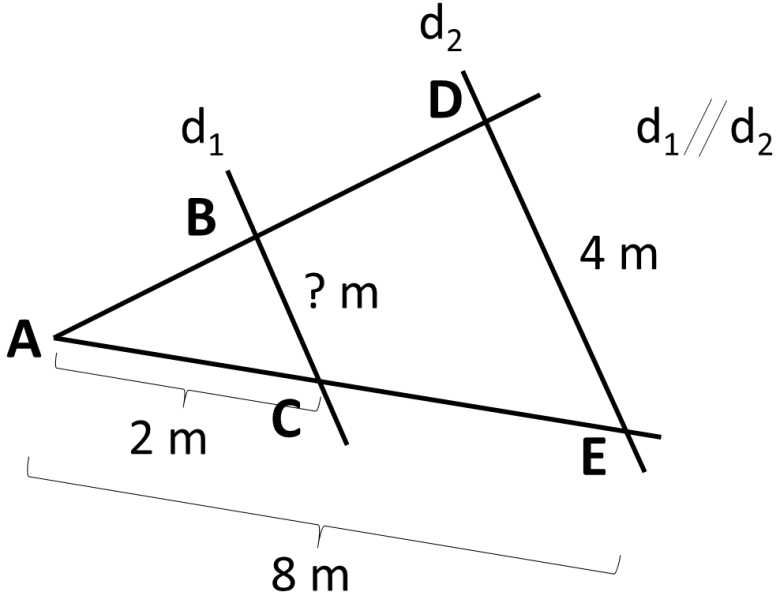
Mesure sur le chantier

Sur le chantier, vous ne pouvez pas mesurer la distance (BC).

Pouvez-vous la calculer avec les autres mesures ?

Si oui, quelle est sa mesure ?

Réponse au dixième.



R: 1,0 [m]

(cc) BY-NC-ND

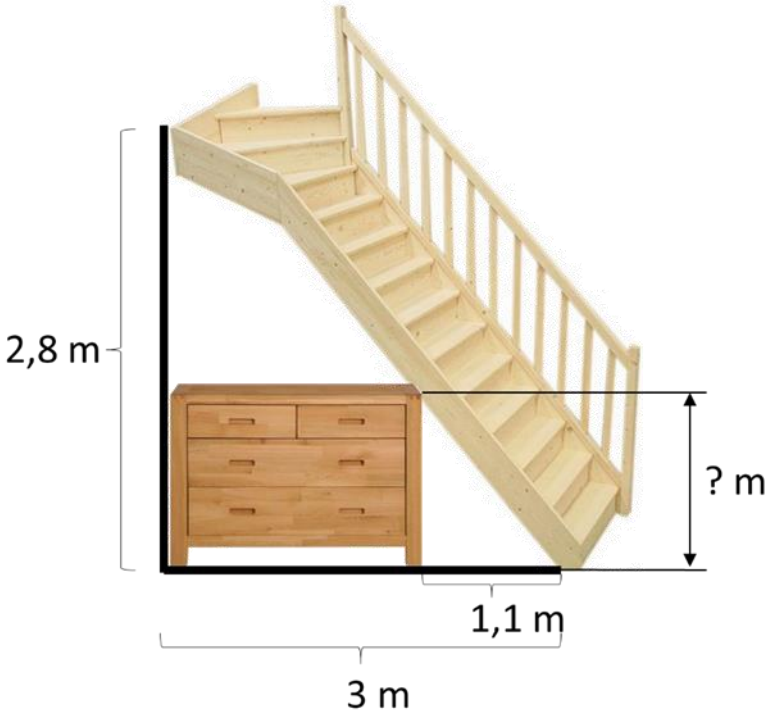
johann.sievering@edu.ge.ch

L'escalier

Vous devez réaliser un aménagement pour un client selon le plan ci-dessus.

Quelle est la hauteur de la commode qu'il faut prévoir sous l'escalier ?

Réponse au dixième.



R: 1,0 [m]

(cc) BY-NC-ND

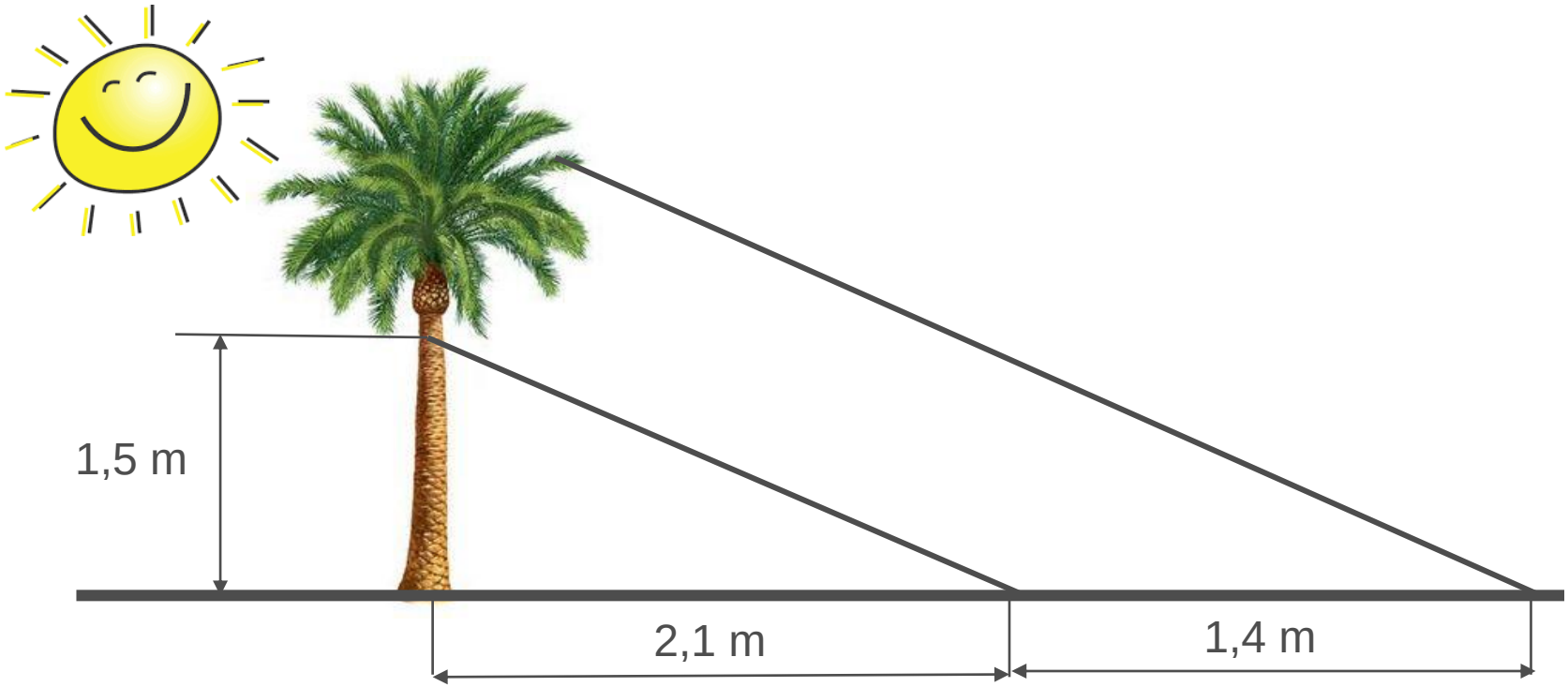
johann.sievering@edu.ge.ch

L'arbre

Vous souhaitez connaître la hauteur de l'arbre. Les rayons du soleil sont parallèles.

Déterminer la hauteur de l'arbre ci-dessous ?

Réponse au dixième.



R: 2,5 [m]

(cc) BY-NC-ND

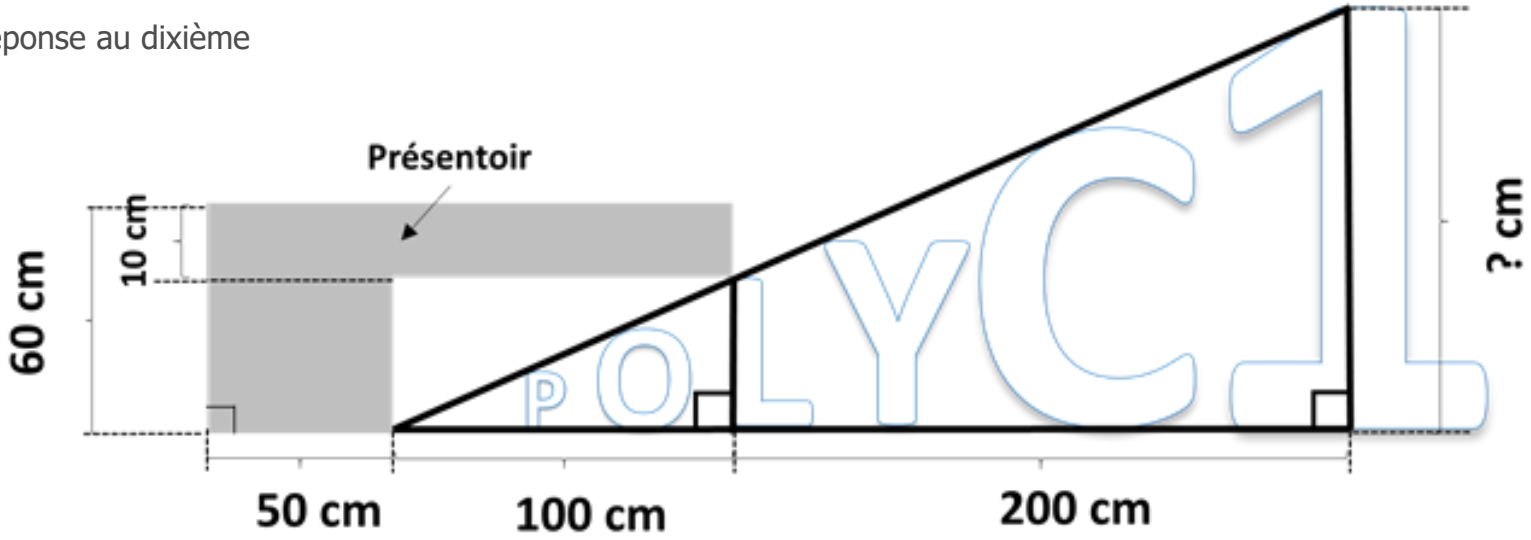
johann.sievering@edu.ge.ch

Le présentoir

Sur votre stand, vous devez placer les lettres POLYC1 partant sous le présentoir et arrivant à deux mètres sur plus loin (voir plan ci-dessous).

Quelle est la hauteur du chiffre « 1 » en cm ?

Réponse au dixième



(Remarque ne pas faire de mesures directement sur le dessin, il n'est pas à l'échelle).

R: 150,0 [cm]

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch



QUESTIONS / RÉPONSES ?

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch