Théorème de Pythagore

POLYC1 2021-2022

Contenu :

- Un peu d'histoire
- Révision des types de triangles et du triangle rectangle
- Démonstration illustrative du théorème
- Enoncé du théorème de Pythagore (avec exemples)
- Enoncés de la réciproque et de la contraposée
- Exercices pratiques



CFP Arts Genève
hhttps://cfparts.ch

Johann Sievering
v05

cc BY NC ND

OBJECTIFS du COURS





Un peu d'histoire

Révision des types de triangles et du triangle rectangle

Démonstration illustrative du théorème

Enoncé du théorème de Pythagore (avec exemples)

Enoncés de la réciproque et de la contraposée (avec exemples)

La corde à 13 nœuds

Exercices pratiques

Objectifs :

- Comprendre les principes de base du théorème de Pythagore ;
- Être capable de calculer un côté d'un triangle rectangle connaissant les deux autres côtés ;
- Être capable de mettre en application de théorème de Pythagore ;
- Être capable de mettre en application la réciproque et la contraposée de théorème ;
- Être capable de résoudre des problèmes métier impliquant des triangles rectangles ;
- Connaître la corde à 13 nœuds (culture générale).

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

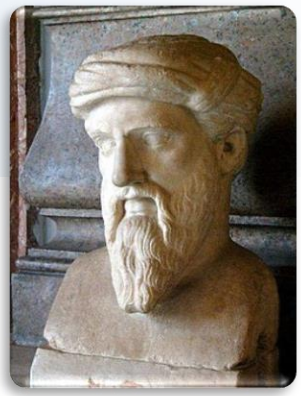
UN PEU D'HISTOIRE



(cc) BY-NC-ND

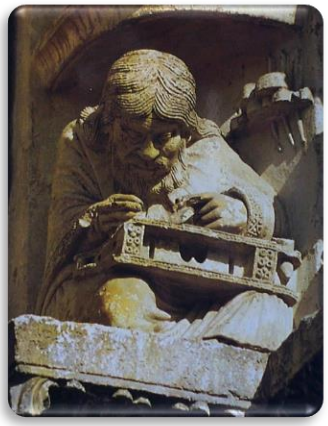
johann.sievering@edu.ge.ch

Pythagore



Source : Wikipédia

- **Pythagore de Samos** serait né aux environs **de 580 av. J.-C.** à Samos *(une île de la mer Égée au sud-est de la ville d'Athènes).* Il serait décédé vers **495 av. J.-C.**
- C'était un philosophe, un mathématicien et un scientifique.
- Pythagore acquiert ses connaissances au cours de ses voyages (Syrie, Egypte, Babylone, ...). Il fait progresser l'arithmétique (science des nombres) et agrandit le champ des connaissances des mathématiques avec également ceux de la musique, de l'astronomie et de la mécanique.
- En fait, nous ne savons pas grand-chose de la vie de Pythagore et il n'a laissé aucun écrit direct. Mais il est certain qu'à son époque il avait une grande importance et influence dans ses domaines.



Source : Wikipédia

- L'origine du théorème de Pythagore n'est pas connue de manière claire. Cette propriété ($c^2 = a^2 + b^2$) était en fait connue depuis des millénaires. Par exemple la tablette de Plimpton 322 datant de l'époque des Babyloniens (~2000 av. J.-C.).



Source : http://www.maths-et-tiques.fr

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

TYPES DE TRIANGLES

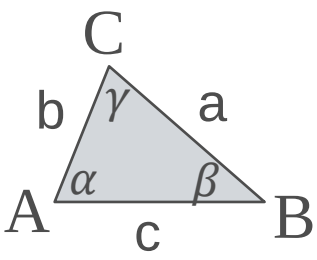


(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Les triangles

Triangle scalène
(quelconque)



Côtés

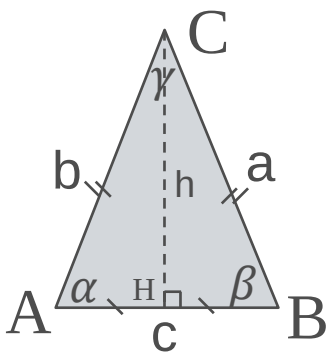
$a \neq b \neq c$

Angles

$\alpha \neq \beta \neq \gamma$

Remarque :
- Un triangle scalène peut être rectangle

Triangle isocèle



Côtés

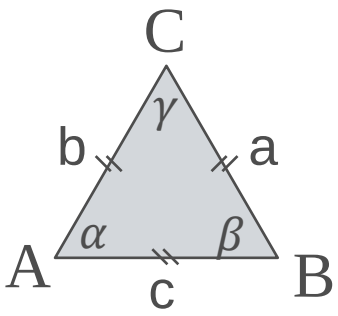
$a = b$

Angles

$\alpha = \beta$

Remarques :
- La hauteur h divise la base en deux parties égales (AH = HB)
- Un triangle isocèle peut être rectangle

Triangle équilatéral



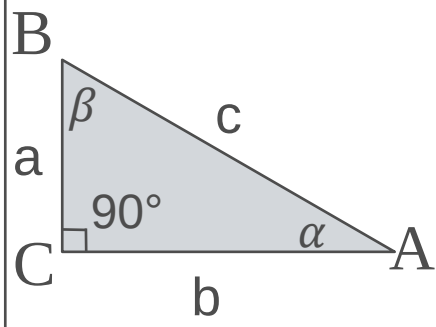
Côtés

$a = b = c$

Angles

$\alpha = \beta = \gamma = 60°$

Triangle rectangle



Côtés

$c^2 = a^2 + b^2$

Angles

$\gamma = 90°$

Nomenclature :
- Côtés a, b : cathètes
- Côté c : hypoténuse

Par rapport à α :
- Côté a : opposé
- Côté b : adjacent

La somme des angles d'un triangle :

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Dans le plan (géométrie euclidienne).

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

TRIANGLE RECTANGLE

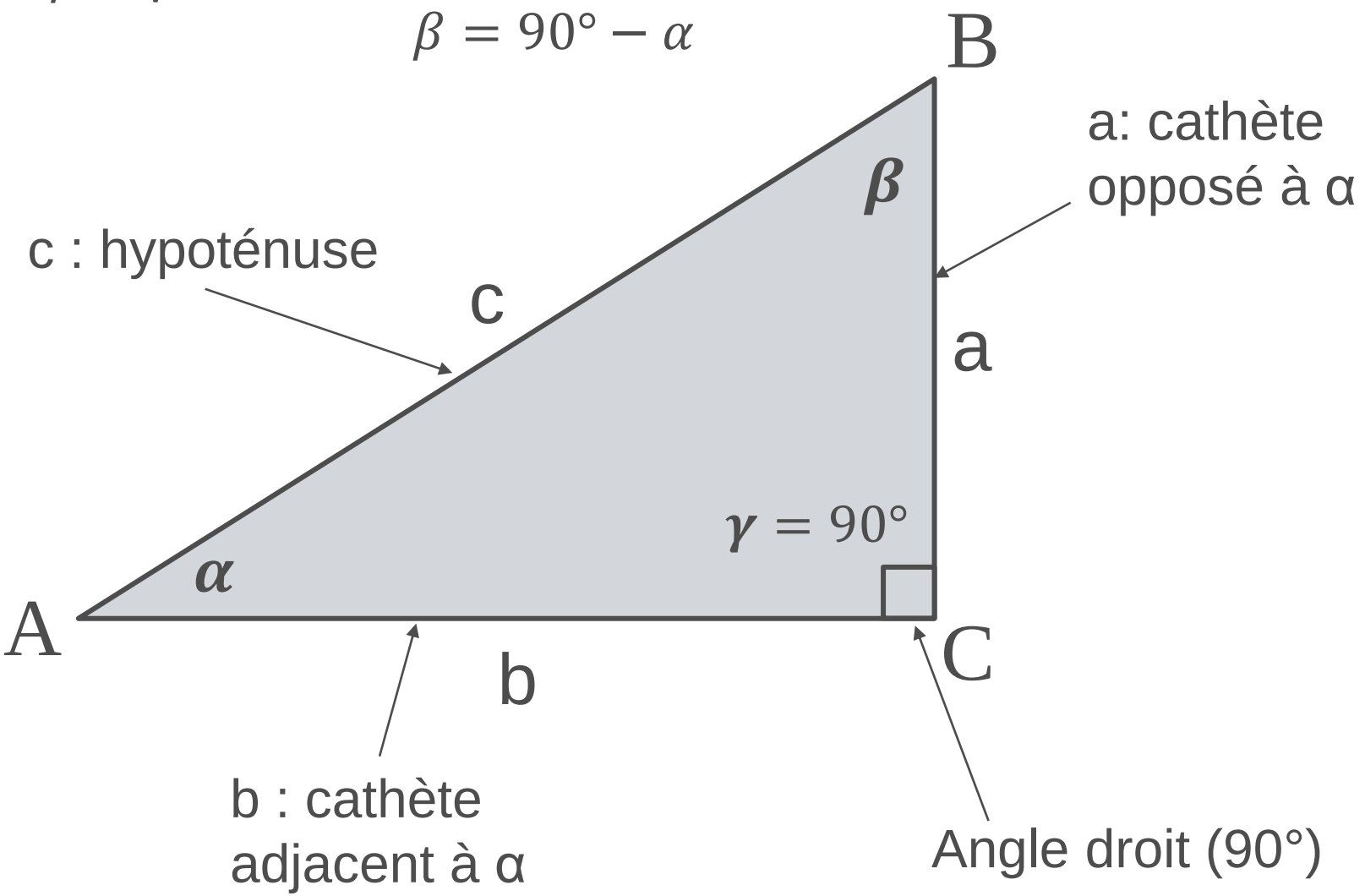


(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Triangle rectangle

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ $\alpha = 90° - \beta$ $\beta = 90° - \alpha$



(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

DÉMONSTRATION ILLUSTRATIVE DU THÉORÈME



(cc) BY-NC-ND

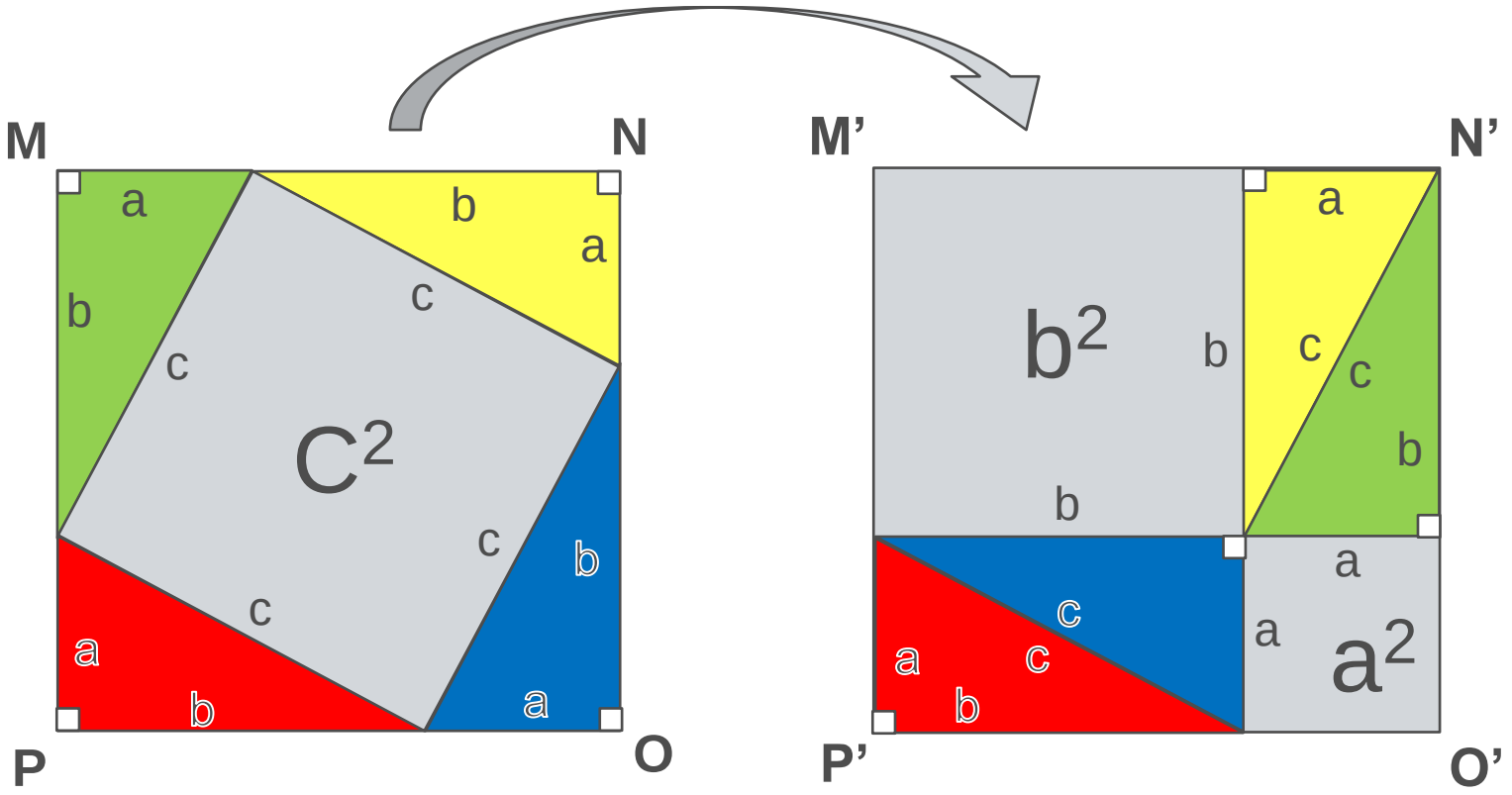
johann.sievering@edu.ge.ch

$c^2 = a^2 + b^2$

Remarque : cette démonstration du théorème de Pythagore n'est pas unique.

Soyez curieux !

Réorganisation des triangles



1. Les carrés MNOP et M'N'O'P' sont identiques, donc leurs aires également ;
2. Tous les triangles rectangles sont identiques (donc leurs aires aussi) ;
3. La somme des aires des triangles sont identiques dans les carrés MNOP et M'N'O'P' ;
4. Pour chaque carré MNOP (respectivement M'N'O'P'), l'aire grisée («petits carrés»), est égales à l'aires du « grand carré MNOP » (respectivement M'N'O'P'), moins la somme des aires de ses triangles inclus ;
5. Donc les aires grisées sont identiques aussi. Alors, il vient : **$c^2 = a^2 + b^2$** CQFD.

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

ENONCÉ DU THÉORÈME DE PYTHAGORE



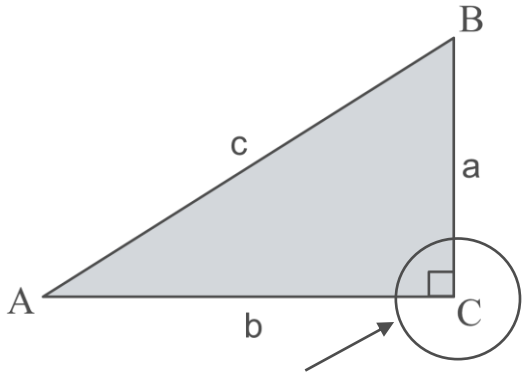
(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle alors *le carré de la longueur de l'hypoténuse* est égal à la *somme des carrées des longueurs des deux autres côtés*.

$$c^2 = a^2 + b^2$$





Il est très important de vérifier que le triangle est bien rectangle.

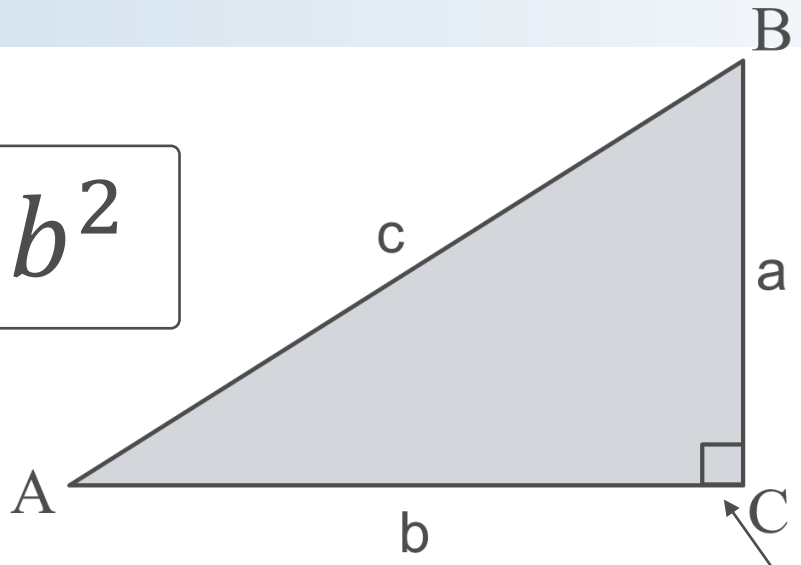
Donc dans un triangle rectangle, il est possible de **calculer un côté** connaissant **les deux autres**.

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Formules du théorème de Pythagore

$$c^2 = a^2 + b^2$$



$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



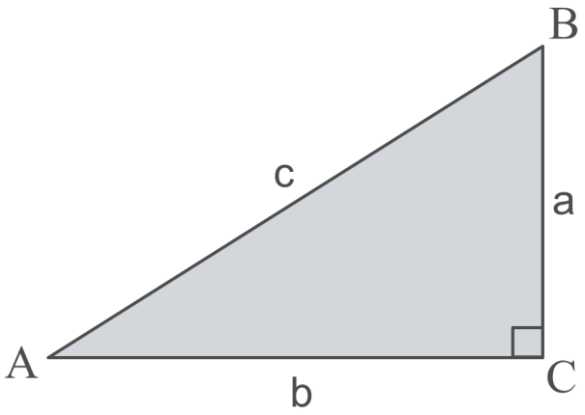
Vérifier :
triangle rectangle

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exemple : théorème de Pythagore

a = 2 cm
b = 3 cm
c = ?



Le triangle ABC est rectangle en C
→ Il est possible d'utiliser le théorème de Pythagore

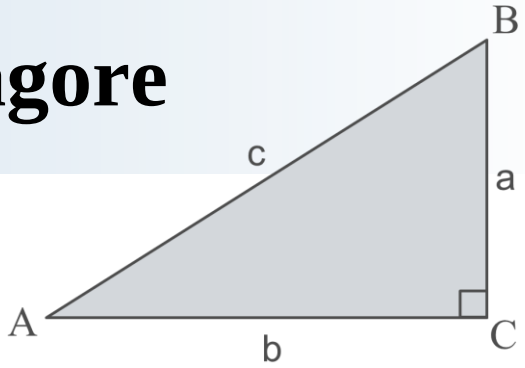
Le côté c est l'hypoténuse, donc utiliser la formule : $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3{,}6\ cm$$

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exercices : théorème de Pythagore



a = 3 [m], b = 4 [m], c = ?

c = 5 [m]

---

a = ?, b = 40 [mm], c = 41 [mm]

a = 9 [mm]

---

a = 65 [dm], b = ?, c = 97 [dm]

b = 72 [dm]

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Triplets pythagoriciens

Un triplet pythagoricien et un triplet **(a, b, c)** dont chaque élément est un entier naturel (nombre positif sans décimale) vérifiant :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Liste des triplets primitifs plus petit que 100 :

(3, 4, 5)	(20, 21, 29)	(11, 60, 61)	(13, 84, 85)
(5, 12, 13)	(12, 35, 37)	(16, 63, 65)	(36, 77, 85)
(8, 15, 17)	(9, 40, 41)	(33, 56, 65)	(39, 80, 89)
(7, 24, 25)	(28, 45, 53)	(48, 55, 73)	(65, 72, 97)

Source : Wikipédia

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

ENONCÉS DE LA RÉCIPROQUE ET DE LA CONTRAPOSÉE



(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Réciproque du théorème de Pythagore

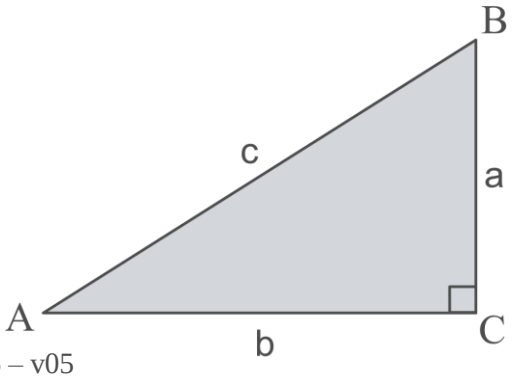
Si, dans un **triangle**, le carré du côté le plus long **est égal** à la somme des carrés des deux autres côtés,
alors ce triangle est un triangle rectangle.

SI

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Le plus long côté

alors



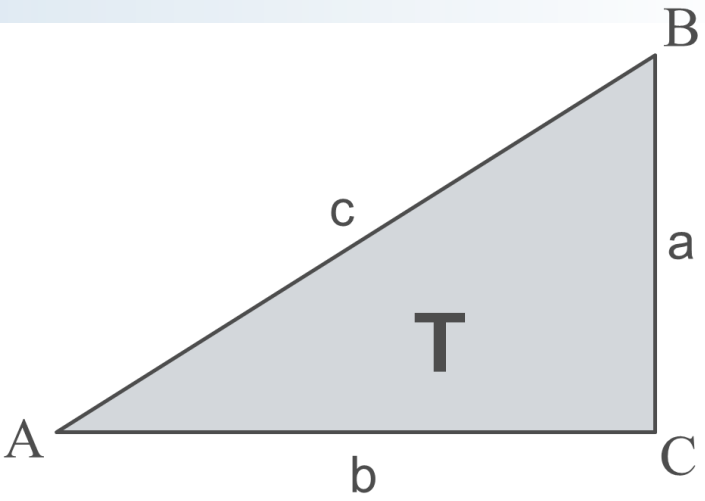
est rectangle en C

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exercices : réciproque du théorème de Pythagore

a = 33 cm
b = 56 cm
c = 65 cm



Est-ce que T est rectangle (en C) ?

(En C car le plus grand côté (hypoténuse) est le côté c).

Il faut vérifier : $c^2 = a^2 + b^2$

1. $c^2 = 65^2 = 4'225$
2. $a^2 + b^2 = 33^2 + 56^2 = 1'089 + 3'136 = 4'225$
3. $4'225 = 4'225 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$
4. On peut conclure que **T est un triangle rectangle** (en C)

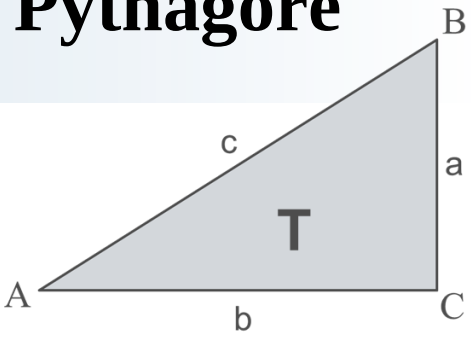
(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exemple : réciproque du théorème de Pythagore

Est-ce que T est rectangle (en C) ?

a = 9 [m], b = 40 [m], c = 41 [m]



oui

Est-ce que T est rectangle (en C) ?

a = 39 [dm], b = 80 [dm], c = 92 [dm]

non

Est-ce que T est rectangle (en C) ?

a = 13 [dm], b = 72 [dm], c = 85 [dm]

non

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Contraposée du théorème de Pythagore

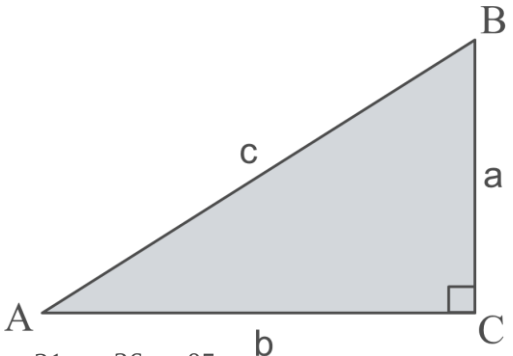
Si, dans un **triangle**, le carré du côté le plus long **n'est pas égal** à la somme des carrés des deux autres côtés, **alors ce triangle n'est pas un triangle rectangle**.

SI

$$c^2 \neq a^2 + b^2$$

Le plus long côté

alors



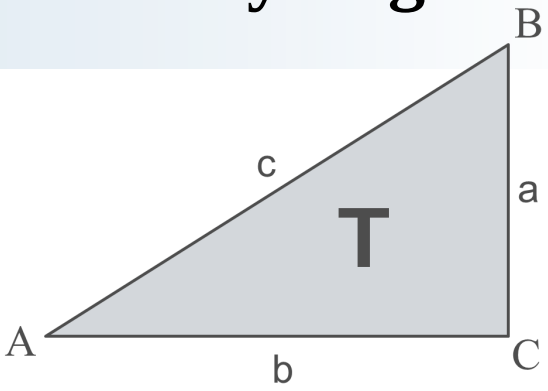
n'est pas rectangle en C

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exercices : contraposée du théorème de Pythagore

a = 28 cm
b = 45 cm
c = 55 cm



Est-ce que T n'est pas rectangle (en C) ?

(En C car le plus grand côté (hypoténuse) est le côté c).

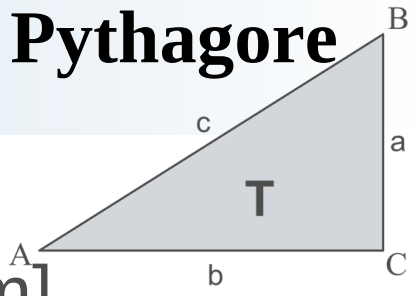
Il faut vérifier : $c^2 \neq a^2 + b^2$

1. $c^2 = 55^2 = 3'025$
2. $a^2 + b^2 = 28^2 + 45^2 = 784 + 2'025 = 2'809$
3. $3'025 \neq 2'809 \Rightarrow c^2 \neq a^2 + b^2$
4. On peut conclure que **T n'est pas un triangle rectangle** (en C)

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Exemple : contraposée du théorème de Pythagore



Est-ce que T n'est pas rectangle (en C) ?

a = 10 [mm], b = 35 [mm], c = 37 [mm]

Oui : T n'est pas rectangle

Est-ce que T n'est pas rectangle (en C) ?

a = 5 [m], b = 12 [m], c = 13 [m]

Non : T est rectangle

Est-ce que T n'est pas rectangle (en C) ?

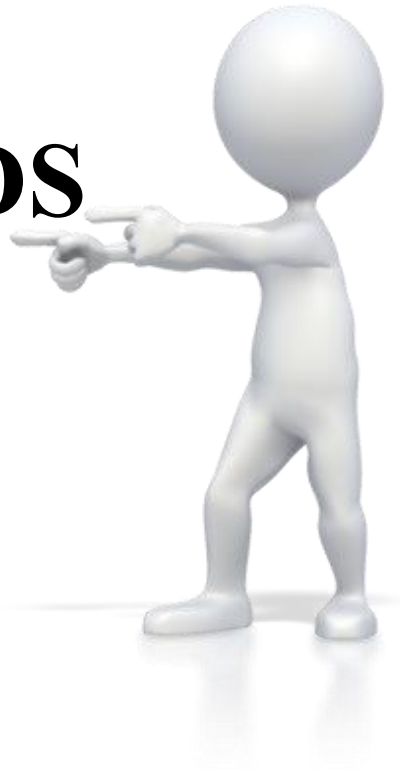
a = 7 [dm], b = 24 [dm], c = 26 [dm]

Oui : T n'est pas rectangle

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

LA CORDE À 13 NŒUDS

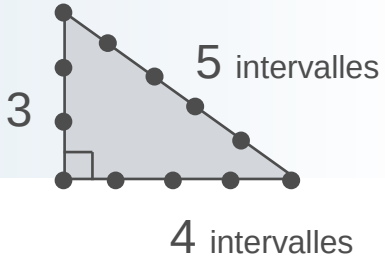


(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

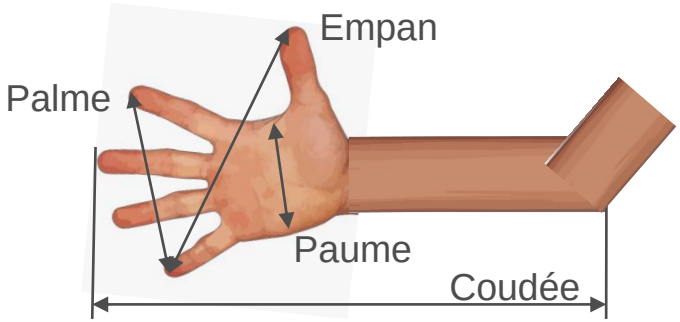
Définition

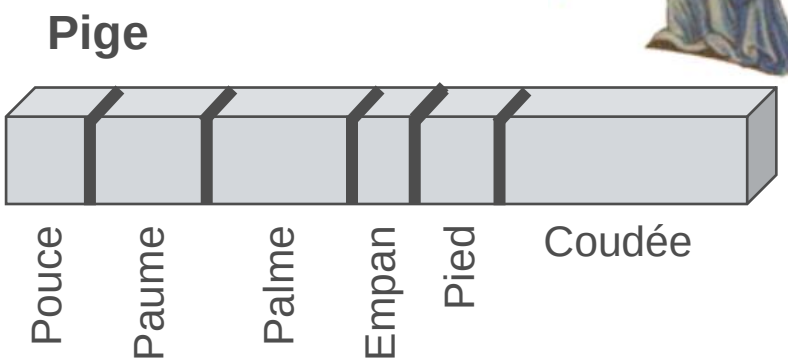




- La « corde à 13 nœuds », ou « corde d'arpenteur » (ou encore « corde des druides », ou « corde égyptienne »), était utilisée au moyen-âge pour résoudre des problèmes d'arithmétiques et de géométrie ;
- A l'époque, peu de gens étaient lettrés et l'utilisation d'outils, telle la corde à nœuds, permettaient de faire des calculs et des constructions géométriques sans savoir lire et/ou calculer. Cela permettait également aux maîtres d'œuvre de transmettre leurs ordres ;
- La corde a une longueur de 12 coudées *(12 intervalles matérialisés par 13 nœuds séparé par une coudée)*.
- La « pige » *(bâton d'une coudée de longueur et d'un pouce d'épaisseur)* permet de construire précisément les intervalles ;
- Cet outil simple a été longtemps utilisé en architectures et en arpentage *(mesure de la superficie de terrains)*, notamment dans l'antiquité.





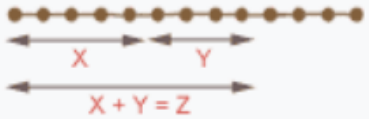
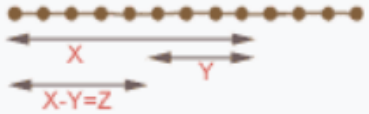
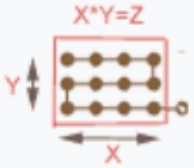
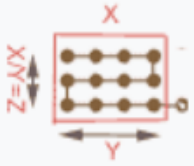


(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Opérations et tracés

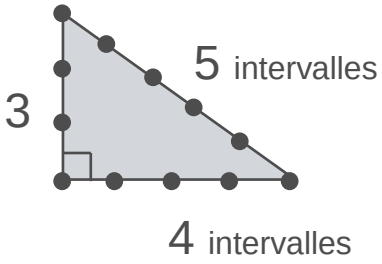


Addition $z=x+y$	Compter x nœuds, puis y nœuds. Le nombre total de nœuds est z.	
Soustraction $z=x-y$	Compter x nœuds, puis revenir de y nœuds. Le résultat est z nœuds.	
Multiplication $z=x\times y$	Compter x nœuds, puis recommencer y fois, ce que l'on peut faire en repliant la corde y fois sur elle-même. Le nombre total de nœuds est z.	
Division $x=q\times y+r$	Compter x nœuds, et le marquer sur la corde. Compter y nœuds puis replier sur lui-même le segment ainsi obtenu. Le nombre de replis est q et le nombre de nœuds restants est r.	

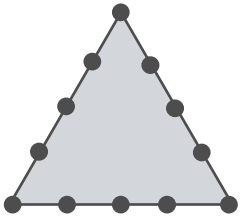
Source : Wikipédia

Exemples de tracés

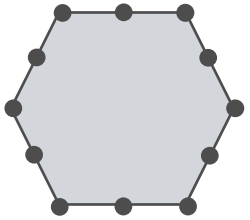
Triangle rectangles



Triangle équilatéral



Hexagone



(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

EXERCICES



(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Diagonale de la pièce

Dans votre chantier, vous devez tracer une ligne diagonale dans une des pièces d'habitation. Cette pièce est rectangulaire et mesure 4 mètres par 3 mètres.



Quelle est la longueur de la ligne ?

Réponse au dixième.

R: 5,0 [m]

(cc) BY-NC-ND

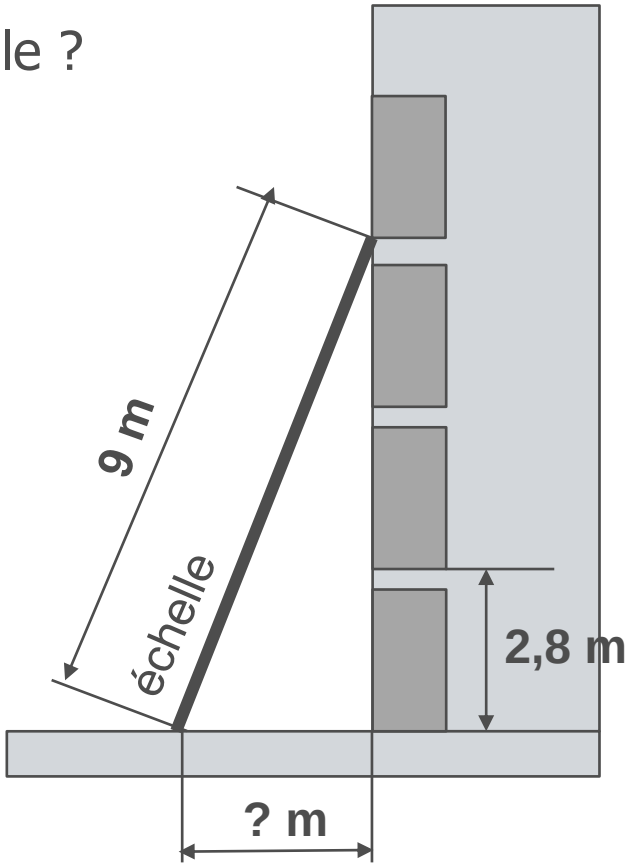
johann.sievering@edu.ge.ch

L'échelle

Une échelle est posée sur la façade d'un immeuble au troisième étage.
La longueur de l'échelle est de 9 mètres.
La hauteur d'un étage est 2,8 mètres.

A quelle distance du mur doit-on poser l'échelle ?
(Le mur est perpendiculaire au terrain).

Réponse au dixième.



R: 3,2 [m]

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Le poinçon

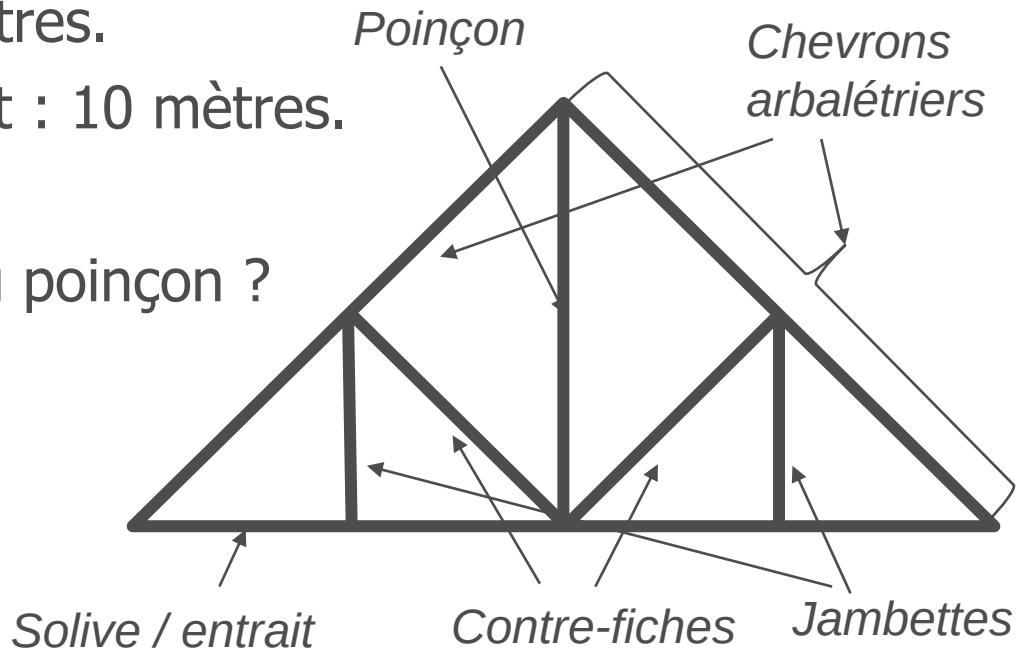
Vous devez calculer la longueur du «poinçon» de la charpente de la toiture de votre client (la toiture est symétrique).

L'entrait mesure : 18 mètres.

Les arbalétriers mesurent : 10 mètres.

Quelle est la longueur du poinçon ?

Réponse au dixième.



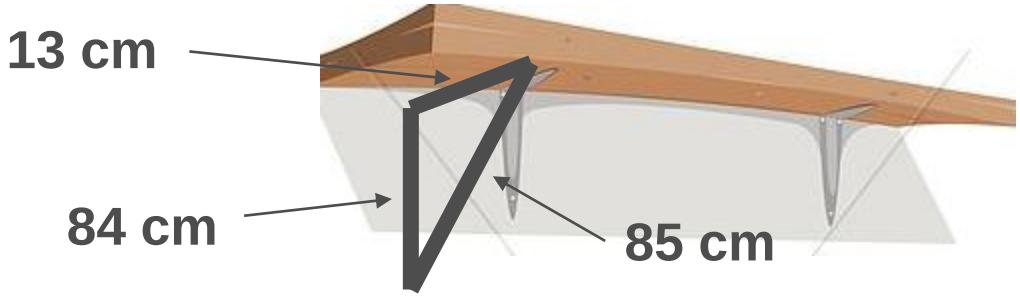
R: 4,4 [m]

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Mon étagère

Vous souhaitez savoir si votre étagère est bien montée sur le mur de votre chambre. C'est-à-dire si votre étagère est bien perpendiculaire au mur. Vous ne disposez pas de niveau à bulle, mais vous avez fait les mesures suivantes :



Est-ce que votre étagère est bien montée ?

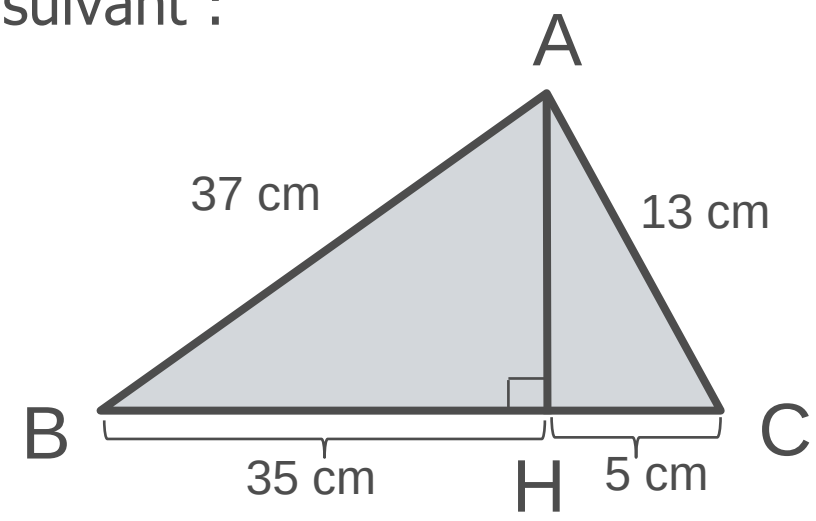
R: oui, l'étagère est bien montée.

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Est-il rectangle ?

Soit le croquis suivant :



Est-ce que le triangle ABC est rectangle ?

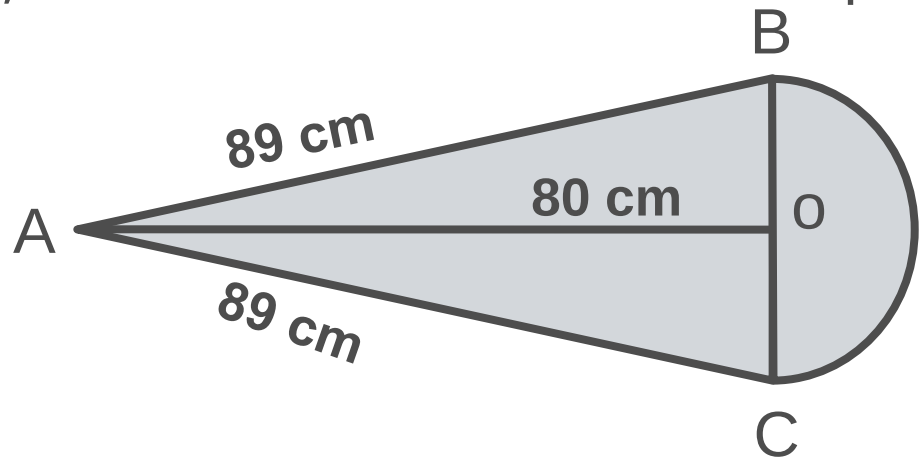
R: non, le triangle ABC n'est pas rectangle.

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Question d'aire ?

Vous devez peindre une pièce en bois. Afin de prévoir votre commande, vous devez calculer l'aire de la pièce (une seule face).



PI = 3.141

Quelle est l'aire de la pièce (une seule face) ?

Réponse à l'unité.

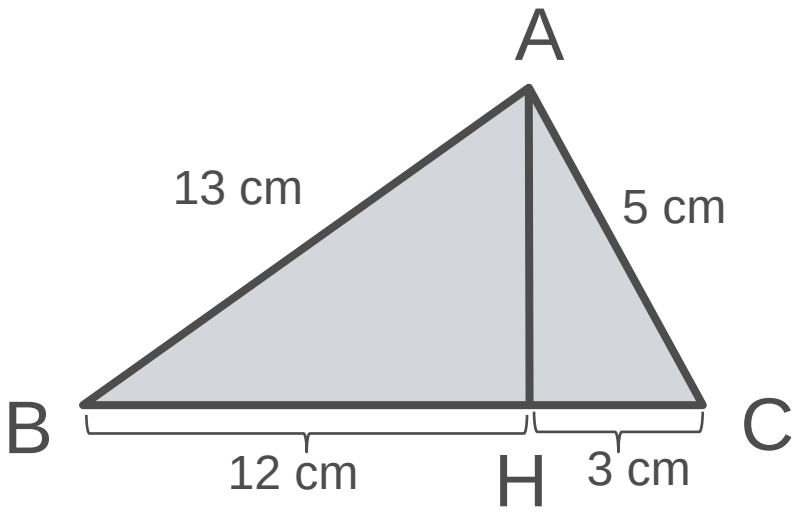
R: 5'509 [cm^2].

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

Est-ce une hauteur ?

Suite à des relevés sur le terrain, vous avez élaboré le croquis suivant :



Est-ce que AH est une hauteur du triangle ABC ?

(Est-ce que AH est perpendiculaire à BC ?)

R: non, AH n'est pas la hauteur du triangle ABC.

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch

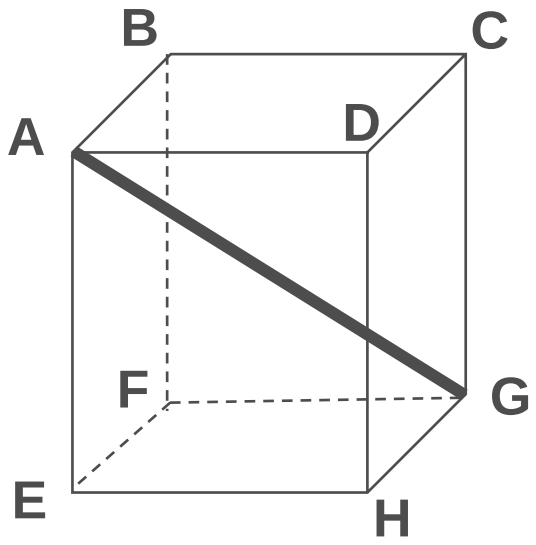
Diagonale du prisme droit

Soit le prisme droit ci-dessous :

$\overline{AE} = 12\ cm$

$\overline{AD} = 4\ cm$

$\overline{AB} = 3\ cm$



Quelle est la longueur de la diagonale AG ?

Réponse au dixième.

R: 13,0 [cm].

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch



QUESTIONS / RÉPONSES ?

(cc) BY-NC-ND

johann.sievering@edu.ge.ch