ANALYSE
par les ultrapetits

Manuel de l'enseignant

I
Principes de base,

Richard O'Donovan
richard.o-donovan@edu.ge.ch

Olivier Lessmann
olivier.lessmann@edu.ge.ch

Ressource et Développement
Département de l'instruction publique
Genève

septembre 2011

Préface

La plupart des mathématiciens ont une idée intuitive sur les infinitésimaux. D'ailleurs, ces représentations mentales d'*infiniment proche* ou d'*infiniment petit* sont souvent utilisées pour expliquer les concepts de l'analyse aux étudiants. Les travaux récents en théorie des ensembles de Karel Hrbacek basés sur les travaux d'Yves Péraire permettent une nouvelle formalisation de ces idées, mathématiquement rigoureuse tout en restant proche de l'intuition, et qui évite, en plus, les difficultés techniques de certaines approches antérieures. Nous avons tenté ici d'adapter ces travaux. Pour éviter toute confusion avec les approches antérieures citées et éliminer les connotations problématiques des dérivés du mot "infini", nous utiliserons les termes ultrapetit, ultragrand et ultraproche. Notre présentation suit le mode traditionnel définitions-théorèmes-preuves et ne prétend pas proposer une approche pédagogique, mais pourra, nous l'espérons, servir de base théorique à une telle approche.

Ce manuel va au dela de ce qui est habituellement enseigné, même en maths 2 – par exemple la continuité uniforme. Nous avons choisi de faire une présentation qui couvre les besoins d'un cours d'analyse en une variable réelle pour le mathématicien enseignant. Des commentaires sur une utilisation en classe seront souvent inclus, ainsi que des remarques concernant des possibilité de démonstrations différentes – précédés du signe



Nous sommes reconnaissant au Professeur Hrbacek d'avoir pris le temps de répondre à nos nombreuses questions. Nous tenons également à le remercier avec le Prof Péraire pour avoir lu et vérifié ce travail. Les erreurs restantes sont bien sûr de notre cru.

Table des matières

1 Pourquoi? 7

I Principes de base 9

1 Pourquoi?

On rappelle ici quelques aspects de l'analyse qui posent des difficultés aux élèves. Dans l'écriture de la notion de limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

on dira "$f(x)$ tend vers L quand x tend vers a." Une des difficultés est que les différentes parties de cette phrase ne signifient rien isolément: "$f(x)$ tend vers L" n'est pas quelque chose qu'on peut observer indépendamment de "x tend vers a". De même que ce "x tend vers a" ne signifie rien tout seul. Il n'est pas possible d'observer que telle valeur de x tend bien vers a. Cette notion doit donc être capturée dans son ensemble pour être comprise.

La formalisation "epsilon-delta" n'est pas plus facile:

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta \quad |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

ici, si l'ordre des quantificateurs n'est pas respectée, si on permute les deux parties, si on met δ avant ε, on n'obtient plus du tout la même chose.

Les alternances de quantificateurs sont difficiles. Pour les élèves, $\forall x \ \exists y \ (y > x)$ et $\exists y \ \forall x \ (y > x)$ sont d'abord perçus comme identiques.

Lorsqu'on définit la tangente comme limite des sécantes, on se heurte à une double difficulté: le concept de limite lui même et le fait qu'une sécante est bien définie comme reposant sur deux points mais lorsque les deux points deviennent confondus, la droite peut avoir n'importe quelle orientation – c'est d'ailleurs la raison pour laquelle $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

Toutes ces difficultés sont bien connues des enseignants d'analyse. C'est ce qui a motivée la recherche d'une autre approche.

Les différents concepts (dérivée, continuité, limite, intégrale) seront introduits d'abord de manière informelle est aussi intuitive que possible. Ces exemples sont destinés à *l'enseignant en mathématiques* et se veulent illustratifs.

On verra, par exemple, que la continuité se définit par $x \simeq a \Rightarrow f(x) \simeq f(a)$ dans un context où il est possible de vérifier si $x \simeq a$ est vrai – sans tenir compte de f, et ensuite de voir si ce même x implique $f(x) \simeq f(a)$. Ce dernier point pouvant aussi être vérifié directement, cette fois sans se soucier de la partie $x \simeq a$.

Introduction à la dérivée

Dessinons la courbe de $f : x \mapsto x^2$ pour x entre -3 et 3 en utilisant 1cm par unité.

Pour calculer la pente de la courbe f en $x = 2$ nous considérons une valeur de x indiscernable de 2 mais non égale. Notons la $2 + h$. On peut prendre $h = 0.001cm$

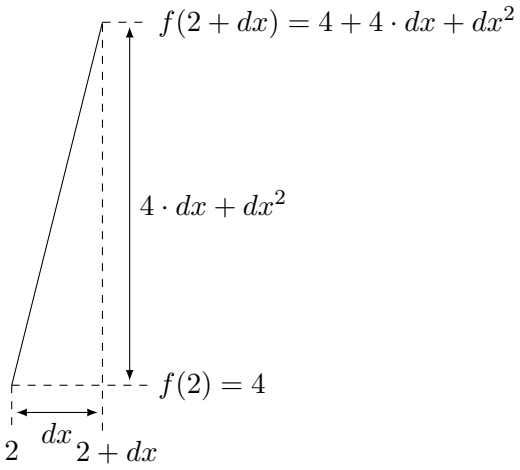
Ceci signifie que h est extrêmement proche de 0: il est extrêmement petit.

Alors la *pente moyenne* sur l'intervalle $[x; x + h]$ est:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4 + h.$$

On peut aussi utiliser dx au lieu de h pour indiquer une quantité extrêmement petite sur l'axe des x.

On peut faire une dessin de ce qu'on verrait si on prenait un microscope permettant de voir h ou de discerner 2 et $2 + h$.



La pente est donc extrêmement proche de 4.

On obtient le même résultat pour x ultraproche de 2 mais inférieur soit avec $h < 0$ (ou $dx < 0$).

On obtient un rapport de deux valeurs extrêmement petites dont le quotient est extrêmement proche de 4. Il est raisonnable de postuler (définir) que lorsqu'on peut voir le point et la fonction autour de ce point, alors la pente de la fonction devrait avoir le même degré d'observabilité. On pose donc que la dérivée est la "partie observable" de ce résultat.

$$f'(2) = 4.$$

Ce résultat est indépendant du choix de h pour autant qu'il soit extrêmement petit (non nul).

Ce qui est important est de considérer que quelque soit le niveau d'observation, il existe des quantités non discernables à ce niveau.

Par exemple, si nous voulons trouver la pente de f au point $3,001$, noté $3+h$ on remarque d'abord qu'il nous faut un 'microscope' pour voir le point $3 + h$. Pour trouver la pente, il nous faut prendre une valeur extrêmement proche de $3 + h$ par rapport au niveau de $3 + h$: un point qui soit indiscernable de $3 + h$ même à l'échelle où on peut le discerner de 3. Il faut un microscope dans le microscope. Soit k un extrêmement petit par rapport à h (par exemple 10^{-6}. La pente moyenne est alors

$$\frac{(3+h+k)^2 - (3+h)^2}{k} = 2 \cdot (3+h) + k$$

On utilise un principe fondamentale mais qui est, nous l'espérons, intuitivement acceptable: si on peut observer deux nombres (s'ils sont du même niveau d'observation) alors on peut observer sans microscope supplémentaire leur somme, différence, produit et quotient (dans le dernier cas, pour autant que le diviseur soit non nul bien sûr).

Donc $2(3 + h)$ est observable et le résultat est donc $2 \cdot (3 + h)$.

Tout à fait généralement, pour la pente de f au point x, considérons une valeur extrêmement proche de x que nous notons $x + dx$:

$$\frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = 2x + dx$$

et le résultat au niveau de résolution de x est $2x$ (qui est dans le même niveau de résolution que x car $2x = x + x$: les opérations familières ne changent pas le niveau du résultat). On note $f'(x) = 2x$, qui est le résultat classique, c'est la *dérivée de f au point x*. On dit que f est *dérivable en x* si $f'(x)$ existe.

Chapitre I
Principes de base

Les propriétés suivantes sont des conséquences d'axiomes ajoutés à ceux de la théorie des ensembles. Il est habituel en analyse de ne pas se préoccuper des axiomes de base mais de leurs conséquences sur les nombres réels. On admettra donc les principes comme axiomatiquement données (sans démonstration).

Propriétés des niveaux

(1) Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Alors il existe un niveau le plus grossier contenant $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

(2) Si un nombre est dans un niveau, il est aussi dans tous les niveaux plus fins.

(3) Quel que soit le niveau, il existe des ultrapetits par rapport à ce niveau.

Définition 1
On dira qu'un nombre est ***ultrapetit par rapport au niveau de*** x *s'il est non nul et plus petit, en valeur absolue, que n'importe quel élément positif dans le niveau de* x.

Notons en particulier que si ε est ultrapetit par rapport à x alors ε n'est pas dans le niveau de x. On dira que, relativement au niveau de x, ε et $x + \varepsilon$ **ne sont pas observables**.

Définition 2
On dira qu'un nombre est ***ultragrand par rapport au niveau de*** x *s'il est plus grand, en valeur absolue, que n'importe quel nombre positif dans le niveau de* x.

Notons une asymétrie: si h est ultrapetit relativement à x, alors il n'est pas observable au niveau de x. Mais x est observable au niveau de h car un nombre d'un niveau grossier reste observable aux niveaux plus fins. Donc x **n'est pas** ultragrand relativement à h.

Principe de clôture
Les nombres définis sans référence à un niveau sont dans le niveau le plus grossier.
Si un nombre satisfait une propriété, alors il existe un nombre observable satisfaisant cette propriété.

Principe de stabilité
Une propriété est vraie si et seulement si elle est vraie si on remplace son niveau de référence par n'importe quel niveau plus fin .

Le principe de clôture dit que tout nombre calculé ou défini sans référence aux niveau est observable au niveau le plus grossier. Il stipule aussi que si une propriété qui ne mentionne pas les niveau peut être satisfaite, alors elle peut l'être pour un nombre du niveau le plus grossier. Idem si niveau le plus grossier est remplacé par niveau arbitraire.

Le principe de stabilité assure que les niveaux sont homogènes: ce qui est vrai pour un niveau, reste vrai pour les niveau plus fins.

Informellement, les nombres familiers sont ceux que l'on connaît sans faire référence au concept de niveaux. Les nombres familiers ne sont ni ultrapetits ni ultragrands et aucune des

opérations habituelles n'en produit. Ces nombres familiers sont tous dans le même **niveau**. C'est le niveau le plus grossier. Les nombres qui peuvent être définis sans aucune référence à un niveau sont tous dans ce niveau. Ceci est formalisé par le principe de clôture.

Par exemple les nombres 0 ; 1; $\frac{3}{2}$; $\sqrt{3}$; π sont dans le niveau le plus grossier.

La définition classique des entiers comme représentant les cardinalités finies reste vraie; les entiers ultragrands ne représentent pas des cardinalités infinies mais des cardinalités finies très grandes. C'est la raison pour laquelle on ne parlera jamais de valeurs "infiniment grandes de x". Ultrapetit signifie ultraproche de zero. Si h est ultrapetit, alors $1/h$ est ultragrand (mais pas infini), il est compris entre deux entiers (ultragrands). De même qu'il existe des réels ultragrands, il existe donc des entiers et de rationnels ultragrands. Il existe de la même manière des rationnels ultrapetits, mais il n'y a bien sûr aucun entier ultrapetit. Par ailleurs, il existe des nombres qui ne sont pas dans le niveau le plus grossier, qui ne sont ni ultrapetits, ni ultragrands, par exemple le nombre de la forme $1 + \varepsilon$, où ε est ultrapetit.

Il existe des nombres réels qui ne sont pas dans le niveau le plus grossier et pour chaque niveau plus fin, il existe des nombres réels qui n'y sont pas.

Si un nombre apparaît à un certain niveau, il est également dans tous les niveaux plus fins.

Ces nombres ne sont pas "nouveaux"; ils étaient déjà là, mais nous n'avions pas les outils formels pour en parler.

De nombreux exercices montrent que la notion d'ultrapetit existe dans l'intuition des étudiants. En particulier, ils admettent facilement les propriétés suivantes que nous formaliserons dans ce chapitre.

Définition 3
*Le **niveau de référence** d'une propriété, d'une fonction ou d'un ensemble est le niveau le plus grossier contenant tous ses paramètres et variables.*

Le niveau d'un objet est donc donné par les paramètres nécessaires à le définir. Si deux définitions différentes existent pour le même objet, on verra que la stabilité permet de choisir la plus grossière sans perte.

⚠ Il est peut-être bon de rappeler que certaines formules utilisent des variables liées par des quantificateurs, comme par exemple la définition classique de la continuité. Dans celle-ci, les ε sont liés par $\forall$ et les δ par un $\exists$. Ces variables sont dites "muettes". Elles ne font pas partie de la propriété mais sont des artifices nécessaires. On va voir qu'en analyse avec ultrapetits, pour ces mêmes formules, on utilise d'autres variables muettes. Ce dont parle une formule, ce sont des valeurs qui sont fixes dans la formule.

Définition 4
*Soit un niveau de référence. Un nombre est **ultrapetit** s'il est non nul et inférieur, en valeur absolue, à tout nombre strictement positif du niveau de référence.*

⚠ Il faut noter que le nombre 0 est explicitement exclu: 0 n'est pas ultrapetit dans ce traitement. Le formalisme en est facilité. On peut par ailleurs le justifier intuitivement pour deux raisons: d'une part 0 est un nombre extrêmement familier or les ultrapetits sont nouveaux. D'autre part *tendre vers* 0 et *atteindre* 0 sont deux choses différentes.

Définition 5
*Soit un niveau de référence. Un nombre est **ultragrand** s'il est supérieur, en valeur absolue, à tous les nombres du niveau de référence.*

Définition 6
Soit un niveau de référence. Soient a, b des nombres réels. On dira que a est ***ultraproche*** *de b, ce qu'on écrira*

$$a \simeq b,$$

si $b - a$ est ultrapetit par rapport au niveau de référence ou alors si $a = b$.

En particulier, $x \simeq 0$ si x est ultrapetit par rapport au niveau de référence ou nul.

La notion d'ultrapetit est donc définie comme dépendant du contexte ou du niveau de référence. Ce point est crucial car il simplifie beaucoup la notation: il suffit de dire "ultrapetit" et non "ultrapetit relativement à".

Par ailleurs, le symbole "$\simeq$" est le seul nouveau symbole introduit ici.

Cette notation est dite "contextuelle".

Notation contextuelle
Les seules propriétés admises sont celles qui ne se réfèrent pas au niveaux d'observation (les définitions "classiques") ou celles qui utilisent le symbole "$\simeq$".

non respect de la notation contextuelle

Dans le langage enrichi des nouveaux concepts d'ultragrands, ultrapetits et ultraproches, il est possible d'envisager des propriétés qui ne respectent pas la notation contextuelle. La notation donnée ici est volontairement "piégée": "$\simeq$" n'est défini que relativement à un niveau de référence. Pour faire une référence non contextuelle il faudrait donc inventer une nouvelle notation. Le lecteur pourra s'amuser à en inventer une et pourra produire des objets "pathologiques" telles qu'une chose qui ressemble à une fonction, qui est partout horizontale et semble continue mais qui est globalement croissante! Ces objets sont "externes" et peuvent contredire des théorèmes. Nous n'en parlerons pas plus ici. Il suffit de savoir que les respect de la notation contextuelle garantit que les objets définis sont bien des ensembles, des fonctions ou des propriétés au sens habituel de ces termes.

Nous énonçons le dernier principe:

Principe du voisin
Si un nombre n'est pas ultragrand par rapport à un niveau de référence donné, alors il existe un nombre dans le niveau de référence qui en est ultraproche.

Le principe du voisin dit que les réels sont très "serrés": si un réel n'est pas ultragrand relativement à un niveau, alors il y en a toujours un observable qui n'est pas loin. Si x n'est pas ultragrand alors on peut l'écrire $a + h$ où a est observable et h est ultraproche de zéro. a sera **la partie observable** de x ou son voisin.

Une conséquence du principe de clôture est que si f est une fonction alors

$$f(a) \text{ est observable.}$$

L'expression $f(a)$ est déterminée par les paramètres de f ainsi que a. Ceux-ci donnent le niveau de référence. S'il existe un nombre $y = f(a)$ alors il en existe un qui est observable. Comme f est une fonction, y est unique. Cela signifie donc que $f(a)$ est observable au niveau de f et de a.

La valeur $\sqrt{2}$ est du niveau le plus grossier, puisque c'est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = 2$, dont tous les paramètres sont du niveau le plus grossier puisque définis sans référence à des niveaux.