ANALYSE
par les ultrapetits

Manuel de l'enseignant

I
Principes de base,
Dérivée,
Continuité

Richard O'Donovan
richard.o-donovan@edu.ge.ch

Olivier Lessmann
olivier.lessmann@edu.ge.ch

Ressource et Développement
Département de l'instruction publique
Genève

septembre 2011

Préface

La plupart des mathématiciens ont une idée intuitive sur les infinitésimaux. D'ailleurs, ces représentations mentales d'*infiniment proche* ou d'*infiniment petit* sont souvent utilisées pour expliquer les concepts de l'analyse aux étudiants. Les travaux récents en théorie des ensembles de Karel Hrbacek basés sur les travaux d'Yves Péraire permettent une nouvelle formalisation de ces idées, mathématiquement rigoureuse tout en restant proche de l'intuition, et qui évite, en plus, les difficultés techniques de certaines approches antérieures. Nous avons tenté ici d'adapter ces travaux. Pour éviter toute confusion avec les approches antérieures citées et éliminer les connotations problématiques des dérivés du mot "infini", nous utiliserons les termes ultrapetit, ultragrand et ultraproche. Notre présentation suit le mode traditionnel définitions-théorèmes-preuves et ne prétend pas proposer une approche pédagogique, mais pourra, nous l'espérons, servir de base théorique à une telle approche.

Ce manuel va au dela de ce qui est habituellement enseigné, même en maths 2 – par exemple la continuité uniforme. Nous avons choisi de faire une présentation qui couvre les besoins d'un cours d'analyse en une variable réelle pour le mathématicien enseignant. Des commentaires sur une utilisation en classe seront souvent inclus, ainsi que des remarques concernant des possibilité de démonstrations différentes – précédés du signe



Nous sommes reconnaissant au Professeur Hrbacek d'avoir pris le temps de répondre à nos nombreuses questions. Nous tenons également à le remercier avec le Prof Péraire pour avoir lu et vérifié ce travail. Les erreurs restantes sont bien sûr de notre cru.

Table des matières

1 Pourquoi? 7

I Principes de base 9

II La dérivée 15

III La continuité 21

IV La dérivée des fonctions circulaires 25

V Asymptotes 29

VI Le calcul différentiel 31

VII La limite 43

1 Pourquoi?

On rappelle ici quelques aspects de l'analyse qui posent des difficultés aux élèves. Dans l'écriture de la notion de limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

on dira "$f(x)$ tend vers L quand x tend vers a." Une des difficultés est que les différentes parties de cette phrase ne signifient rien isolément: "$f(x)$ tend vers L" n'est pas quelque chose qu'on peut observer indépendamment de "x tend vers a". De même que ce "x tend vers a" ne signifie rien tout seul. Il n'est pas possible d'observer que telle valeur de x tend bien vers a. Cette notion doit donc être capturée dans son ensemble pour être comprise.

La formalisation "epsilon-delta" n'est pas plus facile:

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta \quad |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

ici, si l'ordre des quantificateurs n'est pas respectée, si on permute les deux parties, si on met δ avant ε, on n'obtient plus du tout la même chose.

Les alternances de quantificateurs sont difficiles. Pour les élèves, $\forall x \ \exists y \ (y > x)$ et $\exists y \ \forall x \ (y > x)$ sont d'abord perçus comme identiques.

Lorsqu'on définit la tangente comme limite des sécantes, on se heurte à une double difficulté: le concept de limite lui même et le fait qu'une sécante est bien définie comme reposant sur deux points mais lorsque les deux points deviennent confondus, la droite peut avoir n'importe quelle orientation – c'est d'ailleurs la raison pour laquelle $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

Toutes ces difficultés sont bien connues des enseignants d'analyse. C'est ce qui a motivée la recherche d'une autre approche.

Les différents concepts (dérivée, continuité, limite, intégrale) seront introduits d'abord de manière informelle est aussi intuitive que possible. Ces exemples sont destinés à *l'enseignant en mathématiques* et se veulent illustratifs.

On verra, par exemple, que la continuité se définit par $x \simeq a \Rightarrow f(x) \simeq f(a)$ dans un context où il est possible de vérifier si $x \simeq a$ est vrai – sans tenir compte de f, et ensuite de voir si ce même x implique $f(x) \simeq f(a)$. Ce dernier point pouvant aussi être vérifié directement, cette fois sans se soucier de la partie $x \simeq a$.

Introduction à la dérivée

Dessinons la courbe de $f : x \mapsto x^2$ pour x entre -3 et 3 en utilisant 1cm par unité.

Pour calculer la pente de la courbe f en $x = 2$ nous considérons une valeur de x indiscernable de 2 mais non égale. Notons la $2 + h$. On peut prendre $h = 0.001cm$

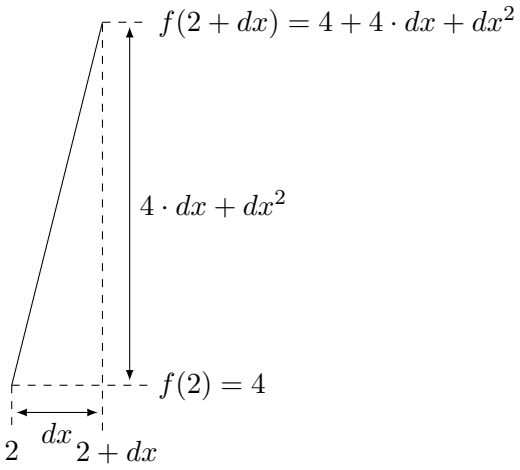
Ceci signifie que h est extrêmement proche de 0: il est extrêmement petit.

Alors la *pente moyenne* sur l'intervalle $[x; x + h]$ est:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4 + h.$$

On peut aussi utiliser dx au lieu de h pour indiquer une quantité extrêmement petite sur l'axe des x.

On peut faire une dessin de ce qu'on verrait si on prenait un microscope permettant de voir h ou de discerner 2 et $2 + h$.



La pente est donc extrêmement proche de 4.

On obtient le même résultat pour x ultraproche de 2 mais inférieur soit avec $h < 0$ (ou $dx < 0$).

On obtient un rapport de deux valeurs extrêmement petites dont le quotient est extrêmement proche de 4. Il est raisonnable de postuler (définir) que lorsqu'on peut voir le point et la fonction autour de ce point, alors la pente de la fonction devrait avoir le même degré d'observabilité. On pose donc que la dérivée est la "partie observable" de ce résultat.

$$f'(2) = 4.$$

Ce résultat est indépendant du choix de h pour autant qu'il soit extrêmement petit (non nul).

Ce qui est important est de considérer que quelque soit le niveau d'observation, il existe des quantités non discernables à ce niveau.

Par exemple, si nous voulons trouver la pente de f au point $3,001$, noté $3+h$ on remarque d'abord qu'il nous faut un 'microscope' pour voir le point $3 + h$. Pour trouver la pente, il nous faut prendre une valeur extrêmement proche de $3 + h$ par rapport au niveau de $3 + h$: un point qui soit indiscernable de $3 + h$ même à l'échelle où on peut le discerner de 3. Il faut un microscope dans le microscope. Soit k un extrêmement petit par rapport à h (par exemple 10^{-6}. La pente moyenne est alors

$$\frac{(3+h+k)^2 - (3+h)^2}{k} = 2 \cdot (3+h) + k$$

On utilise un principe fondamentale mais qui est, nous l'espérons, intuitivement acceptable: si on peut observer deux nombres (s'ils sont du même niveau d'observation) alors on peut observer sans microscope supplémentaire leur somme, différence, produit et quotient (dans le dernier cas, pour autant que le diviseur soit non nul bien sûr).

Donc $2(3 + h)$ est observable et le résultat est donc $2 \cdot (3 + h)$.

Tout à fait généralement, pour la pente de f au point x, considérons une valeur extrêmement proche de x que nous notons $x + dx$:

$$\frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = 2x + dx$$

et le résultat au niveau de résolution de x est $2x$ (qui est dans le même niveau de résolution que x car $2x = x + x$: les opérations familières ne changent pas le niveau du résultat). On note $f'(x) = 2x$, qui est le résultat classique, c'est la *dérivée de f au point x*. On dit que f est *dérivable en x* si $f'(x)$ existe.

Chapitre I
Principes de base

Les propriétés suivantes sont des conséquences d'axiomes ajoutés à ceux de la théorie des ensembles. Il est habituel en analyse de ne pas se préoccuper des axiomes de base mais de leurs conséquences sur les nombres réels. On admettra donc les principes comme axiomatiquement données (sans démonstration).

Propriétés des niveaux

(1) Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Alors il existe un niveau le plus grossier contenant $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

(2) Si un nombre est dans un niveau, il est aussi dans tous les niveaux plus fins.

(3) Quel que soit le niveau, il existe des ultrapetits par rapport à ce niveau.

Définition 1
On dira qu'un nombre est ***ultrapetit par rapport au niveau de*** x *s'il est non nul et plus petit, en valeur absolue, que n'importe quel élément positif dans le niveau de* x.

Notons en particulier que si ε est ultrapetit par rapport à x alors ε n'est pas dans le niveau de x. On dira que, relativement au niveau de x, ε et $x + \varepsilon$ **ne sont pas observables**.

Définition 2
On dira qu'un nombre est ***ultragrand par rapport au niveau de*** x *s'il est plus grand, en valeur absolue, que n'importe quel nombre positif dans le niveau de* x.

Notons une asymétrie: si h est ultrapetit relativement à x, alors il n'est pas observable au niveau de x. Mais x est observable au niveau de h car un nombre d'un niveau grossier reste observable aux niveaux plus fins. Donc x **n'est pas** ultragrand relativement à h.

Principe de clôture
Les nombres définis sans référence à un niveau sont dans le niveau le plus grossier.
Si un nombre satisfait une propriété, alors il existe un nombre observable satisfaisant cette propriété.

Principe de stabilité
Une propriété est vraie si et seulement si elle est vraie si on remplace son niveau de référence par n'importe quel niveau plus fin .

Le principe de clôture dit que tout nombre calculé ou défini sans référence aux niveau est observable au niveau le plus grossier. Il stipule aussi que si une propriété qui ne mentionne pas les niveau peut être satisfaite, alors elle peut l'être pour un nombre du niveau le plus grossier. Idem si niveau le plus grossier est remplacé par niveau arbitraire.

Le principe de stabilité assure que les niveaux sont homogènes: ce qui est vrai pour un niveau, reste vrai pour les niveau plus fins.

Informellement, les nombres familiers sont ceux que l'on connaît sans faire référence au concept de niveaux. Les nombres familiers ne sont ni ultrapetits ni ultragrands et aucune des

opérations habituelles n'en produit. Ces nombres familiers sont tous dans le même **niveau**. C'est le niveau le plus grossier. Les nombres qui peuvent être définis sans aucune référence à un niveau sont tous dans ce niveau. Ceci est formalisé par le principe de clôture.

Par exemple les nombres 0 ; 1; $\frac{3}{2}$; $\sqrt{3}$; π sont dans le niveau le plus grossier.

La définition classique des entiers comme représentant les cardinalités finies reste vraie; les entiers ultragrands ne représentent pas des cardinalités infinies mais des cardinalités finies très grandes. C'est la raison pour laquelle on ne parlera jamais de valeurs "infiniment grandes de x". Ultrapetit signifie ultraproche de zero. Si h est ultrapetit, alors $1/h$ est ultragrand (mais pas infini), il est compris entre deux entiers (ultragrands). De même qu'il existe des réels ultragrands, il existe donc des entiers et de rationnels ultragrands. Il existe de la même manière des rationnels ultrapetits, mais il n'y a bien sûr aucun entier ultrapetit. Par ailleurs, il existe des nombres qui ne sont pas dans le niveau le plus grossier, qui ne sont ni ultrapetits, ni ultragrands, par exemple le nombre de la forme $1 + \varepsilon$, où ε est ultrapetit.

Il existe des nombres réels qui ne sont pas dans le niveau le plus grossier et pour chaque niveau plus fin, il existe des nombres réels qui n'y sont pas.

Si un nombre apparaît à un certain niveau, il est également dans tous les niveaux plus fins.

Ces nombres ne sont pas "nouveaux"; ils étaient déjà là, mais nous n'avions pas les outils formels pour en parler.

De nombreux exercices montrent que la notion d'ultrapetit existe dans l'intuition des étudiants. En particulier, ils admettent facilement les propriétés suivantes que nous formaliserons dans ce chapitre.

Définition 3
*Le **niveau de référence** d'une propriété, d'une fonction ou d'un ensemble est le niveau le plus grossier contenant tous ses paramètres et variables.*

Le niveau d'un objet est donc donné par les paramètres nécessaires à le définir. Si deux définitions différentes existent pour le même objet, on verra que la stabilité permet de choisir la plus grossière sans perte.

⚠ Il est peut-être bon de rappeler que certaines formules utilisent des variables liées par des quantificateurs, comme par exemple la définition classique de la continuité. Dans celle-ci, les ε sont liés par $\forall$ et les δ par un $\exists$. Ces variables sont dites "muettes". Elles ne font pas partie de la propriété mais sont des artifices nécessaires. On va voir qu'en analyse avec ultrapetits, pour ces mêmes formules, on utilise d'autres variables muettes. Ce dont parle une formule, ce sont des valeurs qui sont fixes dans la formule.

Définition 4
*Soit un niveau de référence. Un nombre est **ultrapetit** s'il est non nul et inférieur, en valeur absolue, à tout nombre strictement positif du niveau de référence.*

⚠ Il faut noter que le nombre 0 est explicitement exclu: 0 n'est pas ultrapetit dans ce traitement. Le formalisme en est facilité. On peut par ailleurs le justifier intuitivement pour deux raisons: d'une part 0 est un nombre extrêmement familier or les ultrapetits sont nouveaux. D'autre part *tendre vers* 0 et *atteindre* 0 sont deux choses différentes.

Définition 5
*Soit un niveau de référence. Un nombre est **ultragrand** s'il est supérieur, en valeur absolue, à tous les nombres du niveau de référence.*

Définition 6
Soit un niveau de référence. Soient a, b des nombres réels. On dira que a est ***ultraproche*** *de b, ce qu'on écrira*

$$a \simeq b,$$

si $b - a$ est ultrapetit par rapport au niveau de référence ou alors si $a = b$.

En particulier, $x \simeq 0$ si x est ultrapetit par rapport au niveau de référence ou nul.

La notion d'ultrapetit est donc définie comme dépendant du contexte ou du niveau de référence. Ce point est crucial car il simplifie beaucoup la notation: il suffit de dire "ultrapetit" et non "ultrapetit relativement à".

Par ailleurs, le symbole "$\simeq$" est le seul nouveau symbole introduit ici.

Cette notation est dite "contextuelle".

Notation contextuelle
Les seules propriétés admises sont celles qui ne se réfèrent pas au niveaux d'observation (les définitions "classiques") ou celles qui utilisent le symbole "$\simeq$".

non respect de la notation contextuelle

Dans le langage enrichi des nouveaux concepts d'ultragrands, ultrapetits et ultraproches, il est possible d'envisager des propriétés qui ne respectent pas la notation contextuelle. La notation donnée ici est volontairement "piégée": "$\simeq$" n'est défini que relativement à un niveau de référence. Pour faire une référence non contextuelle il faudrait donc inventer une nouvelle notation. Le lecteur pourra s'amuser à en inventer une et pourra produire des objets "pathologiques" telles qu'une chose qui ressemble à une fonction, qui est partout horizontale et semble continue mais qui est globalement croissante! Ces objets sont "externes" et peuvent contredire des théorèmes. Nous n'en parlerons pas plus ici. Il suffit de savoir que les respect de la notation contextuelle garantit que les objets définis sont bien des ensembles, des fonctions ou des propriétés au sens habituel de ces termes.

Nous énonçons le dernier principe:

Principe du voisin
Si un nombre n'est pas ultragrand par rapport à un niveau de référence donné, alors il existe un nombre dans le niveau de référence qui en est ultraproche.

Le principe du voisin dit que les réels sont très "serrés": si un réel n'est pas ultragrand relativement à un niveau, alors il y en a toujours un observable qui n'est pas loin. Si x n'est pas ultragrand alors on peut l'écrire $a + h$ où a est observable et h est ultraproche de zéro. a sera **la partie observable** de x ou son voisin.

Une conséquence du principe de clôture est que si f est une fonction alors

$$f(a) \text{ est observable.}$$

L'expression $f(a)$ est déterminée par les paramètres de f ainsi que a. Ceux-ci donnent le niveau de référence. S'il existe un nombre $y = f(a)$ alors il en existe un qui est observable. Comme f est une fonction, y est unique. Cela signifie donc que $f(a)$ est observable au niveau de f et de a.

La valeur $\sqrt{2}$ est du niveau le plus grossier, puisque c'est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = 2$, dont tous les paramètres sont du niveau le plus grossier puisque définis sans référence à des niveaux.

Exercice 1 (solution en page 47)
Montrer en utilisant les axiomes et les définitions que, pour un niveau de référence donné,

(1) Si ε est ultrapetit, alors $\frac{1}{\varepsilon}$ est ultragrand.

(2) Si M est ultragrand alors $\frac{1}{M}$ est ultrapetit.

Les preuves des règles suivantes sont des applications immédiates des définitions.

Règle 1
Soit un niveau de référence donné. Si x n'est pas ultragrand, a est observable non nul et $h \simeq 0$ et $\varepsilon \simeq 0$. Alors

(1) $a \cdot h \simeq 0$

(2) $\dfrac{a}{h}$ *est ultragrand.*

(3) $\varepsilon \cdot h \simeq 0$

(4) $\varepsilon + h \simeq 0$

Preuve: Sans perte de généralité, nous pouvons supposer tous les termes comme positifs.

(1) Par contradiction. Supposons $a \cdot h \geq b$ pour un b positif et observable. On a donc $h \geq \frac{b}{a}$. Par clôture, b/a est observable ce qui contredit que h est ultrapetit.

⚠ On suggérera de s'arrêter un moment sur cette démonstration. Elle montre la puissance du principe de clôture. Ce principe ainsi que celui du voisin sont les deux outils principaux de cette approche. La stabilité est toute aussi fondamentale mais passe souvent inaperçue dans son utilisation.

(2) Par contradiction: Supposons $a/h \leq b$ pour un b positif et observable. On a donc $a \leq b \cdot h$ mais on vient de montrer que $b \cdot h \simeq 0$. Ceci contredit que a est observable et non nul.

(3) Preuve directe: Soit b n'importe quel nombre positif observable. Par clôture $\sqrt{b}$ est observable et $\varepsilon < \sqrt{b}$ et $h < \sqrt{b}$ donc $\varepsilon \cdot h < b$. Donc $\varepsilon \cdot h \simeq 0$.

Par contradiction: Supposons $\varepsilon \cdot h \geq b$ pour un b positif et observable. On a donc $\varepsilon \geq \frac{b}{h}$. Mais on vient de voir que b/h est ultragrand. Ceci contredit que ε est ultrapetit.

(4) Preuve directe: $\varepsilon < b/2$ et $h < b/2$ pour n'importe quel b positif et observable. D'où $\varepsilon + h < b$. Comme b est arbitraire, $\varepsilon + h \simeq 0$.

□

Les hypothèses de la règle précédente sont nécessaires. Par exemple si n est ultragrand, alors $1/n$ est ultrapetit et $n \cdot 1/n = 1$ n'est pas ultrapetit.

Règle 2
Soit un niveau de référence donné. Soient a et b observables et x et y tels que $a \simeq x$ et $b \simeq y$. Alors

(1)
$$a \pm b \simeq x \pm y.$$

(2)
$$a \cdot b \simeq x \cdot y.$$

(3) Si $b \not\simeq 0$ alors
$$\frac{a}{b} \simeq \frac{x}{y}.$$

(4)
$$a \simeq b \Rightarrow a = b.$$

Preuve:

(1) Si $a \simeq x$ et $b \simeq y$ alors, par le principe du voisin, il existe ε et δ ultrapetits ou nuls tels que $x = a + \varepsilon$ et $y = b + \delta$. Avec cette notation, nous avons:

$$x \pm y = (a + \varepsilon) \pm (b + \delta) = (a \pm b) + \underbrace{(\varepsilon \pm \delta)}_{\simeq 0},$$

de sorte que $a \pm b \simeq x \pm y$.

(2) Pour le produit, nous avons

$$x \cdot y = (a + \varepsilon) \cdot (b + \delta) = a \cdot b + \underbrace{a \cdot \delta}_{\simeq 0} + \underbrace{b \cdot \varepsilon}_{\simeq 0} + \underbrace{\varepsilon \cdot \delta}_{\simeq 0}$$

par la règle 1 et donc $a \cdot b \simeq x \cdot y$.

(3) On montre d'abord que $\frac{1}{b} \simeq \frac{1}{y}$. Pour ceci il suffit de montrer que si on note $\frac{1}{b+\delta} = \frac{1}{b} + k$ alors nécessairement on a $k \simeq 0$

$$\frac{1}{b+\delta} = \frac{1}{b} + k = \frac{1 + bk}{b} \Rightarrow b = (1 + bk)(b + \delta) = b + \delta + b^2 h + \delta b h$$

d'où $\delta + h(b^2 + \delta b) = 0$ d'où encore $h(b^2 + \delta b) \simeq 0$.

Comme b et b^2 sont observables et non nuls, $b^2 + \delta b$ est non nul et plus grand par exemple que $b^2/2$. Donc $h(b^2 + \delta b) > hb^2/2 \simeq 0$. Or $b^2/2$ est observable par clôture, donc h est nécessairement ultrapetit.

La règle générale se déduit en combinant les résultats précédents:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \simeq x \cdot \frac{1}{y}.$$

(4) Ce résultat sera souvent employé par la suite.

Si $a \simeq b$ alors $a - b \simeq 0$. Comme a et b sont observables, leur différence est observable. Elle ne peut donc pas être ultrapetite. Elle est donc nulle.

□

⚠ Le résultat pour le quotient est techniquement le plus compliqué. Pour des élèves, ceci demande une bonne attention. En contrepartie, on remarquera par la suite que ceci nous donne immédiatement les règles correspondant au sommes, produits et quotients de limites qui, elles, sont encore plus difficiles à démontrer.

Une conséquence du point (4) est que le voisin est unique: si $a \simeq x \simeq b$ avec a et b observables, alors $a = b$. Ceci est équivalent à l'unicité de la limite!

L'existence du voisin n'est pas garantie dans $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire que le voisin d'un rationnel n'est pas forcément rationnel: Soit x un nombre rationnel ultraproche de $\sqrt{2}$ (pour N ultragrand il suffit de prendre les N premières décimales de $\sqrt{2}$). Mais $\sqrt{2}$ est le seul nombre du niveau le plus grossier ultraproche de x et il n'est pas rationnel.

Exercice 2 (solution page 47)
Trouver ε et δ des ultrapetits tels que le quotient $\frac{\varepsilon}{\delta}$ soit

(1) ultragrand,

(2) ultrapetit,

(3) ni l'un ni l'autre.

(4) Donner un exemple de x et y tels que $x \simeq y$ mais $x^2 \not\simeq y^2$.

(5) Donner un exemple de x et y tels que $x \simeq y$ mais $\frac{1}{x} \not\simeq \frac{1}{y}$.

Exercice 3 (solution en page 47)

Dans ce qui suit ε et δ sont des ultrapetits positifs et H et K des ultragrands positifs. Déterminer si les expressions données sont ultrapetites, ultragrandes, ou ni l'une ni l'autre.

(1) $1 + \dfrac{1}{\varepsilon}$.

(2) $\dfrac{\sqrt{\delta}}{\delta}$.

(3) $\sqrt{H+1} - \sqrt{H-1}$.

(4) $\dfrac{H+K}{H \cdot K}$.

(5) $\dfrac{5+\varepsilon}{7+\delta} - \dfrac{5}{7}$.

(6) $\dfrac{\sqrt{1+\varepsilon} - 2}{\sqrt{1+\delta}}$.

Exercice 4 (solution en page 48) La clôture est un principe assez facilement admis par les élèves. Il peut être intéressant pour l'enseignant de vérifier qu'en fait la deuxième partie de ce principe

Si un nombre satisfait une propriété, alors il existe un nombre observable satisfaisant cette propriété.

peut être déduite du principe de stabilité.

Remarques sur la présentation aux élèves:

- Il n'est pas nécessaire de démontrer toutes les propriétés ci-dessus avant de parler de la dérivée. Il est tout à fait possible de calculer des dérivées de fonctions spécifiques en démontrant les règles au fur et à mesure des besoins.
- Du fait qu'il existe toujours un niveau de référence et que quasiment toutes le fonctions étudiées ont tous leurs paramètres du niveau le plus grossier, on peut convenir que comme il n'y a pas d'ultrapetit dans le niveau le plus grossier, pour de telles fonctions, l'oubli de mentionner le niveau de référence signifie référence au niveau le plus grossier.

Chapitre II
La dérivée

Pour la définition de la dérivée en un point, il faut que f soit définie au moins sur un intervalle ouvert $]b, c[$ contenant a. Comme le domaine de f est déterminé par f, il est dans le niveau de f et nous pouvons toujours supposer que b, c sont dans le niveau de f.

On notera souvent dx pour un ultrapetit non nul pour une différence ultrapetite de la variable en x. Par convention, comme c'est une variable indépendante, on la choisit non nul mais on ne spécifie pas si la valeur est positive ou négative.

Définition 7
Soit a un nombre réel et f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert contenant a. On dit que f est ***dérivable au point*** *a s'il existe un nombre observable D tel que pour tout $dx \simeq 0$ on a*

$$\frac{f(a+dx)-f(a)}{dx} \simeq D$$

On note $D = f'(a)$ et on appelle $f'(a)$ la ***dérivée de*** *f* ***en*** *a.*

Cette définition concerne f au point a. Son niveau de référence est donc donné par f et a.

- Le résultat ne doit pas dépendre de dx
- La dérivée, si elle existe, est le voisin – ou partie observable – de $(f(a+dx)-f(a))/dx$.

Donnons deux exemples.

Exemple
Considérons d'abord la dérivée de la fonction

$$f : x \mapsto x^2 + 3x$$

au point x. Comme f est dans le niveau le plus grossier, le niveau de référence de f et du point x est le niveau de x. Soit dx ultrapetit. Alors

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{((x+dx)^2+3(x+dx))-(x^2+3x)}{dx} = \frac{2xdx+3dx+dx^2}{dx} = 2x+3+dx.$$

Or $2x+3+dx \simeq 2x+3$ qui est observable et indépendant de dx, c'est donc la dérivée cherchée. On en conclut que la fonction f est dérivable en tout point x et que $f'(x) = 2x+3$.

⚠ Notons qu'il suffit de spécifier que le niveau de référence est celui de f et de x sans spécifier plus précisément. Comme x est observable et que 2 et 3 sont observables (il font partie des paramètres) alors $2x+3$ est observable.

Exemple
Considérons la dérivée de la fonction valeur absolue

$$g : x \mapsto |x|$$

au point 0. Soit le niveau de référence de g et du point 0. Soit dx ultrapetit. Si $dx > 0$, alors on a

$$\frac{g(0+dx)-g(0)}{dx} = \frac{g(dx)-g(0)}{dx} = \frac{dx-0}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1.$$

Si, en revanche, $dx < 0$, on a

$$\frac{g(0+dx)-g(0)}{dx} = \frac{g(dx)-g(0)}{dx} = \frac{-dx-0}{dx} = \frac{-dx}{dx} = -1.$$

Il n'y a donc pas de nombre réel unique qui satisfasse la condition indépendamment de la valeur de dx. On en conclut que la dérivée de g en 0 n'existe pas.

La valeur absolue est définie sans référence aux niveaux, c'est donc une fonction du niveau le plus grossier. On notera cependant qu'il n'est pas nécessaire de s'en soucier. Ce sera souvent le cas.

Exercice 5 (solution page 48)
Soit $f : x \mapsto ax + b$.
Montrer que la pente de f est a (quel que soit le niveau de a et b).

Exercice 6 (solution page 48)
Soit $f : x \mapsto x^3 - x^2$.
En utilisant la définition, calculer $f'(2)$ et $f'(3+h)$, pour h ultrapetit par rapport à 0.

Définition 8
*Soit f dérivable au point a. La **droite tangente à f au point** $(a, f(a))$, notée T_a, est l'unique droite passant par $(a, f(a))$ de pente $f'(a)$.*

On vérifie facilement que

$$T_a : x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a).$$

⚠ Notons qu'on définit ici la tangente en utilisant la dérivée au lieu de définir, comme on le fait parfois, la dérivée comme étant la pente de la tangente – avec la difficile question de la définition de la tangente sans référence à la dérivée.

Règles de dérivation

Il est pratique d'introduire la notation suivante:
Notation: Soit dx un ultrapetit par rapport à x et f. On écrit

$$\Delta f(x) = f(x+dx) - f(x).$$

Avec cette notation

$$\frac{\Delta f(x)}{dx} \simeq f'(x).$$

On utilisera aussi que $f(x+dx) = f(x) + \Delta f(x)$.

Nous établissons maintenant tous les théorèmes habituels sur la dérivée de la somme, du produit, du quotient et de la composition de fonctions dérivables. Nous utiliserons sans mention les règles sur la manipulation des ultrapetits.

Théorème 1 (La dérivée d'une fonction constante)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \lambda$. Alors

$$f'(x) = 0.$$

Preuve: Le niveau de référence contient x et f, c'est-à-dire x, λ. Soit dx ultrapetit. Comme $f(x+dx) = f(x) = \lambda$, nous avons $\Delta f(x) = 0$ et donc $\frac{\Delta f(x)}{dx} = 0 = f'(x)$ puisque 0 est observable à tous les niveaux. □

Si dans le calcul d'une dérivée on prend dx dans un niveau encore plus fin que nécessaire, pour les fonctions explicites, on observe qu'on trouve la même dérivée. La cas générale est une conséquence de la stabilité: on peux travailler avec un niveau plus fin. En particulier si on combine deux fonctions de niveaux différents, le niveau de référence est le plus fin des deux.

⚠ Tant qu'on ne travaille qu'avec des fonctions du niveau le plus grossier, cette remarque n'est pas nécessaire. Par ailleurs si on travaille avec des fonction avec paramètres explicitement donnés (les fonctions sont des "règles de calcul") alors même si une lettre représente un nombre de niveau plus fin, en générale on trouve des dérivées explicites et la remarque ci-dessus n'est pas nécessaire. On peut aussi résumer le principe de stabilité: le niveau de référence ne change rien si on le prend plus fin que nécessaire.

Théorème 2 (La dérivée du produit d'une fonction par une constante)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable en a. Alors la fonction $\lambda \cdot f$ est dérivable en a et:

$$(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a).$$

Preuve: Le niveau de référence contient λ, f et a. Soit dx ultrapetit. On a:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\lambda f(a))}{dx} &= \frac{\lambda \cdot f(a+dx) - \lambda \cdot f(a)}{dx} \\ &= \lambda \cdot \frac{\Delta f(a)}{dx} \\ &\simeq \lambda \cdot f'(a). \end{aligned}$$

Mais $\lambda \cdot f'(a)$ est dans le niveau de référence, donc $(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$. □

Nous considérons maintenant la somme, le produit et le quotient de fonctions.

Théorème 3 (La dérivée d'une somme)
Soient f et g des fonctions dérivables au point a. Alors la fonction $f+g$ est dérivable au point a et on a:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Preuve: Le niveau de référence contient f, g et a. Soit dx ultrapetit. On a:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(f+g)(a)}{dx} &= \frac{f(a+dx) + g(a+dx) - f(a) - g(a)}{dx} \\ &= \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} + \frac{g(a+dx) - g(a)}{dx} \\ &= \frac{\Delta f(a)}{dx} + \frac{\Delta g(a)}{dx} \\ &\simeq f'(a) + g'(a). \end{aligned}$$

Mais $f'(a) + g'(a)$ est dans le niveau de référence, donc $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$. □

Théorème 4
Si $f'(a)$ existe, alors $\Delta f(a) \simeq 0$.

Preuve: $\Delta f(a) = \frac{\Delta f(a)}{dx} \cdot dx \simeq f'(a) \cdot dx \simeq 0$

□

Théorème 5 (La dérivée d'un produit)
Soient f et g des fonctions dérivables au point a. Alors la fonction $f \cdot g$ est dérivable au point a et on a:

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Preuve: Le niveau de référence contient f, g et a. Soit dx ultrapetit. On a:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta(f \cdot g)(a)}{dx} &= \frac{f(a+dx) \cdot g(a+dx) - f(a) \cdot g(a)}{dx} \\
&= \frac{\Big(f(a) + \Delta f(a)\Big) \cdot \Big(g(a) + \Delta g(a)\Big) - f(a) \cdot g(a)}{dx} \\
&= \frac{f(a) \cdot \Delta g(a) + \Delta f(a) \cdot g(a) + \Delta f(a) \cdot \Delta g(a)}{dx} \\
&= f(a) \cdot \frac{\Delta g(a)}{dx} + \frac{\Delta f(a)}{dx} \cdot g(a) + \frac{\Delta f(a) \cdot \Delta g(a)}{dx} \\
&\simeq f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a),
\end{aligned}$$

puisque, en particulier, $\frac{\Delta f(a) \cdot \Delta g(a)}{dx} \simeq f'(a) \cdot \Delta g(a) \simeq 0$ ($\Delta g(a) \simeq 0$ par le théorème 4). Or, le premier et le dernier terme sont dans le niveau de référence, donc $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$. □

⚠ Ces preuves ne sont pas techniquement très différentes des preuves classiques. Elles sont fondamentalement différentes sur le plan cognitif. Le "passage à la limite" n'existe plus. On n'a plus le problème de h qui disparaît comme s'il était zéro mais n'était pas zéro dans la division. La manipulation est plus algébrique: on calcul; ensuite on observe ce qui est observable.

Théorème 6 (La dérivée d'un quotient)
Supposons que f et g sont des fonctions dérivables au point a et que, de plus, $g'(a) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable au point a et on a:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

Preuve: Le niveau de référence contient f, g et a. Soit dx ultrapetit. On a:

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{f(a+dx)}{g(a+dx)} - \dfrac{f(a)}{g(a)}}{dx} &= \frac{\dfrac{f(a+dx)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(a+dx)}{g(a+dx)\cdot g(a)}}{dx} \\
&= \frac{\dfrac{\Big(f(a)+\Delta f(a)\Big)\cdot g(a) - f(a)\cdot\Big(g(a)+\Delta g(a)\Big)}{\big(g(a)+\Delta g(a)\big)\cdot g(a)}}{dx} \\
&= \frac{\dfrac{\Delta f(a)}{dx}\cdot g(a) - f(a)\cdot\dfrac{\Delta g(a)}{dx}}{g^2(a)+\Delta g(a)\cdot g(a)} \\
&\simeq \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)},
\end{aligned}$$

où on a utilisé que $\Delta g(a) \simeq 0$.

La dernière expression est dans le niveau de référence, c'est donc bien la dérivée cherchée. □

Nous terminons par la composition de fonctions. Notons que, grâce aux ultrapetits relatifs, le degré de difficulté n'est pas supérieur à celui des théorèmes précédents.

Théorème 7 (Règle de dérivation en chaîne)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient f et g des fonctions telles que g soit dérivable au point a et f soit dérivable au point $g(a)$. Alors la fonction $f \circ g$ est dérivable au point a et on a:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Preuve: On doit considérer deux cas: (1) $\Delta g(x) = 0$ et (2) $\Delta g(x) \neq 0$.

(1) Si $\Delta g(x) = 0$ alors $g(x+dx) = g(x)$ et $g'(x) = 0$, d'où $\frac{f(g(x+dx))-f(g(x))}{dx} = 0$. Et $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

(2) Si $\Delta g(x) \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{f(g(x+dx)) - f(g(x))}{dx} &= \frac{f(g(x)+\Delta g(x)) - f(g(x))}{dx} \\
&= \frac{f(g(x)+\Delta g(x)) - f(g(x))}{\Delta g(x)} \cdot \frac{\Delta g(x)}{dx} \\
&\simeq f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

puisque f est supposée dérivable en $g(x)$ et comme g est dérivable en x on a $\Delta g(x) \simeq 0$.

□

Si on note $g(x) = y$ l'expression devient

$$\frac{f(y+\Delta y) - f(y)}{dx} = \underbrace{\frac{f(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta y}}_{\simeq f'(y)} \cdot \underbrace{\frac{\Delta y}{dx}}_{\simeq y'}$$

Définition 9
Si f est dérivable en a, la quantité $f'(a)\cdot dx$ est notée $df(a)$: c'est la ***différentielle*** *de f en a.*

On a donc

$$\frac{df(a)}{dx} = f'(a)$$

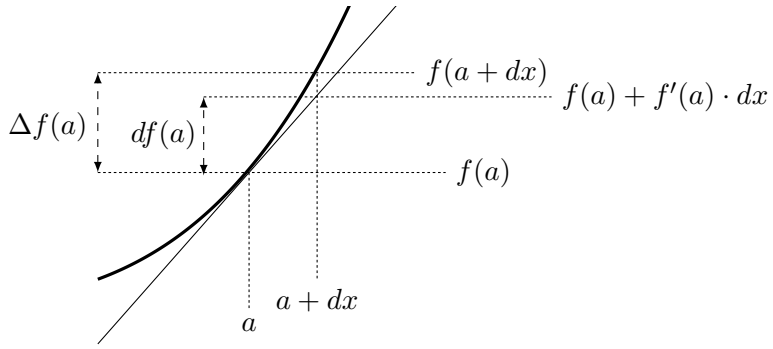
c'est une égalité. L'expression $df(a)/dx$ ici est réellement un quotient.

⚠ Nous attirons l'attention sur la différence entre Δy et dy, soit entre la variation et la différentielle. On a $\frac{\Delta y}{dx} \simeq y'$ d'où $\frac{\Delta y}{dx} = y' + \varepsilon$ (pour $\varepsilon \simeq 0$). On obtient donc

$$\begin{aligned}\Delta y &= y'\cdot dx + \varepsilon\cdot dx\\ &= dy + \varepsilon\cdot dx\end{aligned}$$

Cette expression est l'équation de l'incrément et sera utilisée plus tard. Ici, il importe de noter que cette différence existe. Pour la variable indépendante, on a bien $\Delta x = dx$ mais c'est le seul cas. Dès qu'il s'agit de la variation d'une fonction ou d'une variable dépendante, la différentielle n'est en générale pas égale à la variation.

La différentielle est la variation le long de la tangente de la fonction en a. Sur le dessin suivant, les différences entre fonction et tangente devraient être vraiment très petites. Comme tout croquis, il est faux pour être compréhensible.



La différentielle peut être utilisée pour la preuve ci-dessus. On note $y = g(x)$ et $z = f(y)$. Dans le cas où $g'(y) \neq 0$ on a

$$z'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z'(y)\cdot y'(x).$$

C'est la démonstration de Leibniz.

On terminera cette section avec une fonction qui n'est pas du niveau le plus grossier.

Exercice 7 (solution en page 48)

Soit h ultrapetit par rapport à 0. On définit la fonction suivante

$$H : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq -h\\ \frac{1}{h}\left(x + \frac{h}{2}\right) & \text{if } -h < x < h\\ 1 & \text{if } x \geq h\end{cases}$$

Calculer $H'(x)$.

Chapitre III

Introduction à la continuité

Considérons à nouveau la fonction

$$f : x \mapsto x^2.$$

On dira que f est *continue en* x si la différence

$$f(x + dx) - f(x)$$

est ultrapetite par rapport à x (ou nulle) quand dx est ultrapetit par rapport à x.

Examinons la continuité de f au point $x = 3$. Soit dx ultrapetit par rapport à 3. Alors

$$f(3 + dx) - f(3) = (3 + dx)^2 - 3^2 = 6 \cdot dx + dx^2.$$

Comme dx est ultrapetit par rapport à 3, les quantités $6 \cdot dx$ et dx^2 sont ultrapetites par rapport à 3, donc leur somme l'est aussi. On en conclut que f est continue en 3.

Plus généralement, pour un x donné et dx ultrapetit par rapport à x nous avons

$$f(x + dx) - f(x) = 2x \cdot dx + dx^2$$

et comme la quantité à droite est ultrapetite, f est continue en x.

f est donc continue en x si $\Delta f(x) \simeq 0$.

Nous examinons dans ce chapitre le concept de continuité. Pour cela, il faut que f soit définie au moins sur un intervalle ouvert contenant a. Comme le domaine est dans le niveau de f on peut donc toujours trouver cet intervalle dans le niveau de f.

La continuité

Définition 10
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a. On dit que f est ***continue au point*** *a si et seulement si*

$$f(x) \simeq f(a) \quad \textit{pour chaque } x \simeq a.$$

La continuité de f en a est une propriété de f et de a donc son niveau de référence est celui de f et de a, c'est donc par rapport à ce niveau que l'on travaille (ou un niveau plus fin par stabilité).

On peut aussi écrire que f est continue en a si et seulement si

$$f(a + dx) \simeq f(a)$$

ou

$$\Delta f(a) \simeq 0$$

On rappellera que par convention, dx est ultrapetit non nul.

Nous pouvons tout de suite traduire le théorème 4 en ces nouveaux termes:

Théorème 8 (Continuité des fonctions dérivables)
Si f est dérivable au point a alors f est continue au point a.

⚠ Ce théorème a été démontré page 18. Avec l'équation de l'incrément citée à la fin du chapitre précédent, une formulation légèrement différente est possible.

Si f est dérivable, par la remarque de la fin du chapitre précédent, on a

$$\Delta f(a) = \underbrace{f'(a)\cdot dx}_{\simeq 0} + \underbrace{\varepsilon\cdot dx}_{\simeq 0} \simeq 0$$

Le théorème suivant est une application directe de la règle 2. Nous montrons le produit et laissons les autres en exercice: Supposons f et g continues en a. Soit le niveau de référence contenant f, g et a. Si $x \simeq a$ on a $f(x) \simeq f(a)$ et $g(x) \simeq g(a)$. Mais par la règle 2 (puisque $f(x), f(a), g(x)$ et $g(a)$ ne sont pas ultragrands) on a

$$f(x)\cdot g(x) \simeq f(a)\cdot g(a)$$

donc $f\cdot g$ est continue en a.

Théorème 9
Soient f et g deux fonctions continues au point a. Alors

(1) $f \pm g$ est continue au point a.

(2) $f\cdot g$ est continue au point a.

(3) $\dfrac{f}{g}$ est continue au point a si $g(a)\neq 0$.

⚠ Il peut être plus pertinent, en classe, de revenir toujours au définitions et aux propriétés de base plutôt que d'employer des propriétés démontrées à partir de celles-ci. Pour le produit, cela donne la preuve suivante:

Preuve:

$$\begin{aligned} f(a+dx)\cdot g(a+dx) &= (f(a)+\Delta f(a))(g(a)+\Delta g(a)) \\ &= f(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot\Delta g(a) + \Delta f(a)\cdot g(a) + \Delta f(a)\cdot\Delta g(a) \\ &\simeq f(a)\cdot g(a) \end{aligned}$$

puisque f et g sont continues et que donc $\Delta f(a)\simeq 0$ et $\Delta g(a)\simeq 0$. □

Exercice 8 (solution en page 49)
Démontrer directement le reste du théorème précédent.

Nous énonçons maintenant un théorème sur la composition de fonctions.

Théorème 10
Supposons que g soit continue au point a et f continue au point $g(a)$. Alors la fonction $f\circ g$ est continue au point a.

Preuve: Le niveau de référence est celui de f, g et a. Soit $x\simeq a$. Alors $g(x)\simeq g(a)$ par continuité de g en a. Et donc $f(g(x))\simeq f(g(a))$ par continuité de f en $g(a)$ (qui est dans le niveau de référence). □

Si une fonction est définie sur un intervalle semi-ouvert $]b, a]$ on peut toujours parler de la continuité de f en a (à gauche) en utilisant la limite à gauche de a. On fait de même pour le côté droit.

Définition 11 (Continuité à gauche et à droite)
Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

(1) Supposons que f est définie sur un intervalle de la forme $]b, a]$. Alors f est ***continue à gauche en*** *a si $dx < 0 \Rightarrow f(a + dx) \simeq f(a)$.*

(2) Supposons que f est définie sur un intervalle de la forme $[a, b[$. Alors f est ***continue à droite en*** *a si $dx > 0 \Rightarrow f(a + dx) \simeq f(a)$.*

Il est clair que si f est définie sur un intervalle ouvert contenant a, alors f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

Nous étendons maintenant la continuité d'un point à un intervalle.

Définition 12 (Continuité sur un intervalle)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est ***continue sur*** *I si f est continue en chaque $x \in I$. Si l'intervalle est semi-ouvert ou fermé, alors on utilise la continuité à gauche et à droite aux bornes de l'intervalle.*

Il découle immédiatement des théorèmes qui précèdent que si f et g sont continues sur un intervalle I, alors la somme, la différence, et le produit de f et g sont des fonctions continues sur I. Le quotient est également continu si nous supposons que $g(x) \neq 0$ pour chaque $x \in I$. De plus, si f est continue sur I et g continue sur un intervalle contenant $f(I)$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Si $f : x \mapsto f(x)$ est bijective, on notera ${}^r f : y \mapsto {}^r f(y)$ la **fonction réciproque** de f, c'est-à-dire l'unique fonction telle que

$$f({}^r f(y)) = y, \text{ pour chaque } y \in \mathrm{Dom}({}^r f) \quad \text{et} \quad {}^r f(f(x)) = x, \text{ pour chaque } x \in \mathrm{Dom}(f).$$

On montre maintenant que la réciproque d'une fonction continue est continue. Soit f une fonction bijective. Comme la fonction ${}^r f$ est entièrement déterminée par f, la réciproque doit être dans le niveau de f.

Théorème 11
Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ bijective et continue sur $[a; b]$. Soit $x \in]a; b[$. Alors ${}^r f$ est continue en $f(x)$.

Preuve: Le niveau de référence contient f, a, b et x, donc aussi ${}^r f$. Soit $y \simeq f(x)$. Il faut montrer que ${}^r f(y) \simeq {}^r f(f(x))$, c'est-à-dire que

$${}^r f(y) \simeq x,$$

puisque ${}^r f(f(x)) = x$.

Soit u le voisin de ${}^r f(y)$ (il existe puisque ${}^r f(y)$ est borné par a, b). Par définition

$${}^r f(y) \simeq u.$$

Mais $u \in [a; b]$ puisque ${}^r f(y) \in [a; b]$. Ainsi, par continuité de f en u on a que $f({}^r f(y)) \simeq f(u)$, et puisque $f({}^r f(y)) = y = f(x)$ on a

$$f(x) \simeq f(u).$$

Mais $f(u)$ est aussi dans le niveau de référence par clôture ce qui implique que

$$f(x) = f(u).$$

Comme f est bijective, on a que

$$u = x,$$

de sorte que

$$^{r}f(y) \simeq x.$$

□

Chapitre IV

La dérivée des fonctions circulaires

Le cercle de rayon 1 est défini par $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ for $x \in]-1;1[$. La dérivée est continue en chaque $x \in]-1;1[$ (en considérant $x = \sqrt{1-y^2}$ on voit que le cercle est lisse également en $x = -1$ et $x = 1$.) Pour la dérivée des fonctions sinus et cosinus on reprend le même schéma que pour la continuité. Intuitivement, si on fait un zoom sur un arc de cercle ultrapetit on considère que la différence de longueur entre la corde et l'arc est aussi ultrapetite. En fait, l'équation de l'incrément nous montre que ceci ne suffit pas. Si l'arc ultrapetit est noté $d\theta$, la différence doit être de l'ordre de $\varepsilon \cdot d\theta$ pour un $\varepsilon \simeq 0$.

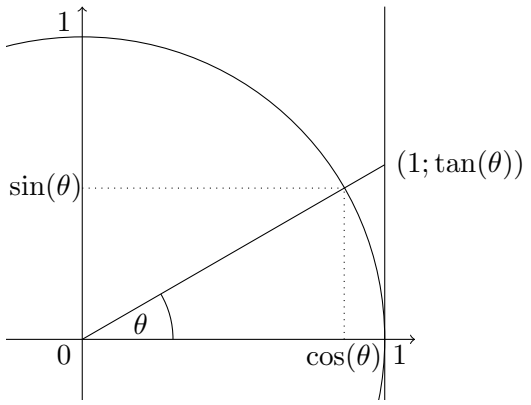
Pour montrer ceci, nous avons besoin du théorème suivant:

Théorème 12

$$\frac{\sin(d\theta)}{d\theta} \simeq 1.$$

Preuve: Supposons d'abord que $\theta > 0$ dans le premier quadrant. En comparant l'aire du secteur avec les aires des triangles intérieur et extérieur on obtient

$$\frac{\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\tan(\theta)\cdot 1}{2} = \frac{\sin(\theta)}{2\cos(\theta)}.$$



On en déduit que

$$\cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

En utilisant $-\theta$ si θ est négatif, on observe que les mêmes inégalités sont vraies pour θ négatif (dans le quatrième quadrant).

Soit $d\theta$ ultrapetit relativement au niveau de 0 soit le niveau le plus grossier (on rappelle que les fonctions trigonométriques sont du niveau le plus grossier). Alors, par continuité du cosinus en 0, on a

$$1 \;\simeq\; \cos(d\theta) \leq \frac{\sin(d\theta)}{d\theta} \leq \frac{1}{\cos(d\theta)} \;\simeq\; 1,$$

ce qui montre que $\dfrac{\sin(d\theta)}{d\theta} \simeq 1$. □

La corde BC est plus courte que l'arc BC. Les fonctions cos, sin et tan sont du niveau le plus grossier. En effet elles sont définies à partir des coordonnées verticales et horizontales des points du cercle sans faire référence à la notion de niveau.

Si l'arc BC est ultrapetit, alors l'hypoténuse BC est ultrapetit. Par Pythagore, chacune des cathètes est plus petite que l'hypoténuse et sont donc ultrapetites. La cathète verticale est $\Delta\sin(\theta)$ et l'horizontale et $\Delta\cos(\theta)$. Sinus et Cosinus sont donc des fonctions continues, donc aussi Tangente.

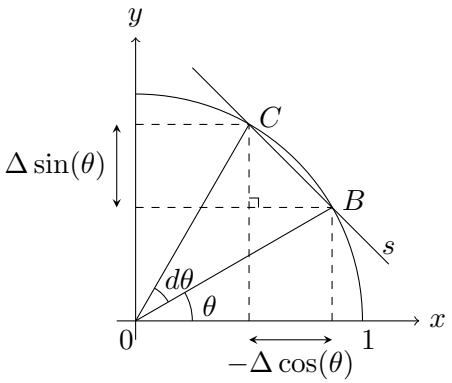
Théorème 13

$$\frac{\cos(d\theta)-1}{d\theta} \simeq 0$$

Preuve:

$$\frac{(\cos(d\theta)-1)(\cos(d\theta)+1))}{d\theta(\cos(d\theta)+1)} = \frac{\cos^2(d\theta)-1}{d\theta(\cos(d\theta)+1)} = \frac{\sin(d\theta)}{d\theta}\frac{\sin(d\theta)}{\cos(d\theta)+1}$$

La première fraction est ultraproche de 1. Par continuité de Cosinus, $\cos(d\theta) \simeq 1$ et $\sin(d\theta) \simeq 0$. La deuxième fraction est donc ultraproche de 0. □



Comme

$$\Delta\sin(\theta) = \sin(\theta+d\theta)-\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \Delta\cos(\theta) = \cos(\theta+d\theta)-\cos(\theta).$$

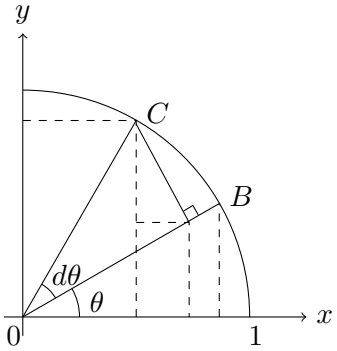
on a

$$\sin(\theta+d\theta) = \sin(\theta)\cos(d\theta)+\cos(\theta)\sin(d\theta)$$

et

$$\cos(\theta+d\theta) = \cos(\theta)\cos(d\theta)-\sin(\theta)\sin(d\theta).$$

par le dessin ci-dessous.



Théorème 14

(1) $\sin'(\theta) = \cos(\theta)$.

(2) $\cos'(\theta) = -\sin(\theta)$.

(3) $\tan'(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$.

Preuve: On montre la dérivée du sinus:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \sin(\theta)}{d\theta} &= \frac{\sin(\theta)\cos(d\theta) + \cos(\theta)\sin(d\theta) - \sin(\theta)}{d\theta} \\ &= \underbrace{\frac{\sin(\theta)(\cos(d\theta) - 1)}{d\theta}}_{\simeq 0} + \underbrace{\frac{\cos(\theta)\sin(d\theta)}{d\theta}}_{\simeq \cos(\theta)} \\ &\simeq \cos(\theta)\end{aligned}$$

Les preuve pour le cosinus est semblable et la tangente s'obtient par la dérivée de sin / cos. □

On notera que cette approche est très proche de la preuve traditionnelle avec l'avantage que les dessin représente des quantités "réelles" et non pas ce qui se passe juste avant la limite.

On peut utiliser la différentielle pour la dérivée des fonctions réciproques:

Théorème 15

(1) $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Preuve: (1) Supposons que $\arcsin(x) = y$, c'est-à-dire que $\sin(y) = x$. On a donc $\sin'(y) = \cos(y)$, c'est-à-dire $\dfrac{dx}{dy} = \cos(y)$. On en tire que

$$\arcsin'(x) = \frac{d\arcsin(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(2) Supposons que $\arccos(x) = y$. Alors

$$\arccos'(x) = \frac{d\arccos(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos'(y)} = \frac{1}{-\sin(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(3) Supposons que $\arctan(x) = y$. Alors

$$\arctan'(x) = \frac{d\arctan(x)}{dx} = \frac{1}{\tan'(y)} = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

Exercice 9 (Solution page 49)

Soit ε ultrapetit par rapport à 0. Considérons la fonction

$$H : x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Calculer $H'(x)$ et esquisser le graphe.

Exercice 10 (Solution page 50)

(1) Montrer que la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ne peut pas être étendue par continuité en $x = 0$.

(2) Montrer que

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ mais sa dérivée $x \mapsto g'(x)$ n'est pas continue en 0. C'est un exemple de fonction dérivable mais pas lisse.

Chapitre V
Asymptotes

On dit que f a une **asymptote verticale d'équation** $x = a$ si

$$x \simeq a^- \Rightarrow f(x) \simeq \pm\infty \quad \text{ou si} \quad x \simeq a^+ \Rightarrow f(x) \simeq \pm\infty.$$

Comme c'est une propriété de f et de a, ceux-ci déterminent donc le niveau de référence.

Exemple
La fonction $f : x \mapsto 1/x$ a une asymptote verticale en zéro, puisque si $x \simeq 0$ (par rapport à zéro) et que $x > 0$, alors

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \textit{est ultragrand et positif.}$$

On peut aussi s'intéresser au comportement asymptotique d'une fonction en regardant la valeur de $f(x)$ pour x ultragrand (par rapport à f). Il faut pour cela que f soit définie sur un intervalle de la forme $[b, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$. Le nombre b est inclus dans le niveau de f.

Définition 13
*Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle de la forme $[b, \infty[$ ou $]-\infty, b]$. On dit que f a une **asymptote horizontale à** $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe un nombre L du niveau de référence tel que*

$$f(x) \simeq L \quad \textit{pour chaque } x \textit{ ultragrand positif (resp. négatif).}$$

Le niveau de référence est celui de f, donc x est pris comme ultragrand par rapport à f. On écrira

$$x \simeq \pm\infty \Rightarrow f(x) \simeq L$$

On dira, plus spécifiquement, que f a une **asymptote horizontale d'équation** $y = L$ si $x \simeq \pm\infty \Rightarrow f(x) = L$.

Exemple
Considérons

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}.$$

pour x ultragrand. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ est définie sur tout $\mathbb{R}$. Soit x ultragrand par rapport à son niveau de référence. Alors

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \simeq \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0} \simeq 2,$$

par les règles sur les manipulations d'ultrapetits du chapitre précédent. On en conclut que f a une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ à $\pm\infty$.

On termine ce chapitre avec les asymptotes obliques.

Définition 14
Une fonction f a une ***asymptote oblique à*** $+\infty$ ***(resp.*** $-\infty$***)*** *s'il existe des nombres a, b du niveau de référence tels que*

$$x \simeq +\infty \Rightarrow f(x) - (ax + b) \simeq 0 \quad (resp.\ x \simeq -\infty \Rightarrow f(x) - (ax + b) \simeq 0).$$

*On dit que la droite $x \mapsto ax + b$ est l'****asymptote oblique de*** *f (à $\pm\infty$).*

L'existence de l'asymptote oblique est une propriété de f, donc la limite est à prendre au sens du niveau de f.

Exemple
Considérons la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$$

définie partout dans $\mathbb{R}$. En utilisant l'algorithme de division des polynômes on a que

$$f(x) = x + 2 - \frac{3}{x^2 + 1}.$$

Soit x ultragrand par rapport à f. On a que

$$f(x) - (x + 2) = \frac{-3}{x^2 + 1} \simeq 0,$$

puisque $x^2 + 1$ est ultragrand. On en déduit que f possède une asymptote oblique d'équation $x + 2$ (en $\pm\infty$), c'est-à-dire que $a = 1$ et $b = 2$.

Le théorème suivant qui permet aussi de trouver a et b dans des cas plus généraux que les fonctions rationnelles.

Théorème 16
Soit f une fonction. Soient a et b du niveau de référence. Alors f a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en $\pm\infty$ si et seulement si

$$x \simeq \pm\infty \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \simeq a \quad et \quad x \simeq \pm\infty \Rightarrow f(x) - ax \simeq b.$$

Preuve: Le niveau de référence est celui contenant f. Supposons d'abord que f a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$. Soit x ultragrand. Alors $f(x) - (ax + b) \simeq 0$, de sorte que $f(x) - ax \simeq b$. Mais comme b n'est pas ultragrand et x est ultragrand on a par les règles d'ultracalcul

$$\frac{f(x) - ax - b}{x} = \frac{f(x)}{x} - a - \underbrace{\frac{b}{x}}_{\simeq 0} \simeq 0 \quad \text{et donc} \quad \frac{f(x)}{x} \simeq a.$$

Pour la réciproque, soit à nouveau x ultragrand. Supposons que a, b existent tels que

$$f(x) - ax \simeq b.$$

On déduit immédiatement par la règle 2 que

$$f(x) - (ax + b) \simeq 0.$$

C'est donc que f a une asymptote oblique d'équation $x \mapsto ax + b$. □

Chapitre VI
Le calcul différentiel

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Considérons la propriété:

$$\textit{il existe } M \textit{ tel que } f(x) \leq M, \textit{ pour tous les } x \in I \textit{ dans le niveau de } f \textit{ et de } I.$$

La propriété est contextuelle et fait référence au niveau de f et de I. Par clôture:

$$\textit{il existe } M \textit{ dans le niveau de } f, I \textit{ tel que } f(x) \leq M, \textit{ pour tous les } x \in I \textit{ dans le niveau de } f \textit{ et de } I$$

On en déduit:

$$f(x) \leq M, \textit{ pour tous les } x \in I \textit{ dans le niveau de } f \textit{ et de } I.$$

Contraposée de la clôture:
Si tous les nombres observables satisfont une propriété, alors tous les nombres satisfont cette propriété.
L'affirmation est vraie pour tous les $x \in I$ dans le niveau de f et de I, elle est donc vrai pour tous les $x \in I$. On a bien:

$$f(x) \leq M, \textit{ pour tous les } x \in I.$$

De manière générale, si une propriété et vraie pour une valeur de la variable, alors elle est vraie pour une valeur observable de cette variable.

⚠ Ce type de manipulation logique n'est pas aisé en classe. On va l'utiliser ici pour démontrer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des valeurs extrêmes. Ces deux théorèmes sont souvent donnés sans preuve aux élèves.

Exercice 11 (solution page 51)
Soit f une fonction. Montrer que s'il existe M et L tels que

$$f(x) = L, \quad \text{pour chaque } x \geq M,$$

alors on peut choisir M, L observables et qu'en particulier

$$f(x) = L, \quad \text{pour chaque } x \text{ ultragrand.}$$

Exercice 12 (solution page 51)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) f est bornée sur I, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f(x)| \leq M, \quad \text{pour chaque } x \in I.$$

(2) $f(x)$ n'est pas ultragrand pour chaque $x \in I$.

Théorème 17
Un ensemble fini non vide de nombres réels a un plus grand et un plus petit élément.

Par exemple, si $f : x \mapsto f(x)$ est une fonction acceptable et N est un entier, alors l'ensemble

$$\{\ f(n) : 0 \leq n \leq N\}$$

est fini et possède donc un maximum.

Ce théorème est en générale utilisé sans preuve dans un cours d'analyse. La preuve classique par induction reste valable. Voir aussi l'annexe .

Nous allons examiner deux conséquences de la continuité d'une fonction f sur un intervalle fermé $[a; b]$. Dans chacun des théorèmes on recherche un c dans $[a; b]$ avec une propriété particulière. Le modèle type de l'argument que nous allons utiliser est le suivant:

Le niveau de référence est celui contenant a, b et f. On choisit d'abord N ultragrand par rapport à a, b et f. Donc $dx = (b - a)/N$ est ultrapetit et on considère les $N + 1$ points $x_i = a + i \cdot dx$, pour $i = 0, \ldots, N$. On utilise ensuite le théorème 17 pour trouver, parmi ces points, un x_j qui approxime le nombre que l'on cherche. Comme x_j n'est pas ultragrand, son voisin existe et se trouve dans $[a; b]$ (par l'exercice 13). On utilise alors la continuité de f sur le voisin (qui est dans le niveau de référence, ce qui permet d'utiliser dx) pour montrer que le voisin a les propriétés cherchées.

Exercice 13 (solution en page 51)
Montrer que si $x \in [a; b]$, alors le voisin de x est lui-même dans $[a; b]$. Montrer que ce résultat est faux pour l'intervalle ouvert $]a; b[$.

Théorème 18 (Théorème de la valeur intermédiaire)
Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. Soit d un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = d$.

Preuve: Il suffit de démontrer le cas où $f(a) < f(b)$ (l'autre cas s'en déduit en utilisant $-f$). Soit $d \in]f(a); f(b)[$. Le niveau de référence est celui de f, a, b et d.

Soit N un entier positif ultragrand et soit $dx = (b - a)/N$. Alors dx est ultrapetit. Considérons $x_i = a + i \cdot dx$, pour $i = 0, \ldots, N$ (donc $x_0 = a$ et $x_N = b$). Par le théorème 17, il existe un premier indice j tel que $f(x_{j+1}) \geq d$. Ainsi par choix de j on a

$$f(x_j) < d \leq f(x_{j+1}).$$

Soit c le voisin de x_j (il existe puisque x_j est borné par a, b). Par définition $x_j \simeq c$. De plus, $c \in [a; b]$ et $c \simeq x_{j+1}$ puisque $x_j \simeq x_{j+1}$. Par continuité de f en c on a alors

$$f(c) \simeq f(x_j) < d \quad \text{et} \quad f(c) \simeq f(x_{j+1}) \geq d.$$

On en déduit que

$$f(c) \simeq d.$$

Mais $f(c)$ est observable par clôture et d aussi, donc

$$f(c) = d.$$

□

La démonstration montre que l'on peut trouver c observable mais c'est en fait une conséquence immédiate de l'énoncé par clôture.

⚠ L'aspect crucial de ce type de démonstration est la possibilité d'avoir une division ultrafine pour laquelle la propriété "il existe un successeur" est vraie.

Définition 15
On dit qu'une fonction f ***atteint son maximum*** *(respectivement* ***son minimum****) sur l'intervalle I s'il existe $c \in I$ tel que $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x \in I$ (respectivement $f(c) \leq f(x)$ pour tout $x \in I$).*

Théorème 19 (Théorème du maximum et du minimum)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé et borné $[a; b]$. Alors f atteint son maximum et son minimum sur $[a; b]$.

Preuve: Il suffit de démontrer le cas du maximum (le minimum s'en déduit en considérant $-f$). On sait, par clôture que s'il existe un maximum, celui-ci est observable. Ceci va guider la démonstration.

Le niveau de référence est celui de f, a et b. Soit N un entier positif ultragrand et soit $dx = (b-a)/N$. Considérons les points $x_i = a + i \cdot dx$, pour $i = 0, \ldots, N$. Par le théorème 17, il existe un indice j tel que

$$f(x_j) \geq f(x_i), \quad \text{pour tous les } i = 0, \ldots, N.$$

Soit c le voisin de x_j (c existe puisque x_j n'est pas ultragrand; il est borné par a, b). Alors $c \in [a; b]$. Par clôture $f(c)$ est observable. Par continuité de f en c on a $f(x_j) \simeq f(c)$ puisque $x_j \simeq c$.

Soit maintenant $x \in [a; b]$ observable. Par le théorème 17 il existe un premier i tel que

$$x_i \leq x < x_{i+1}.$$

On en déduit que

$$x_i \simeq x$$

et puisque f est continue en x on a

$$f(x) \simeq f(x_i).$$

Par définition de x_j et c on a donc

$$f(x) \simeq f(x_i) \leq f(x_j) \simeq f(c),$$

ce qui implique que $f(x) \leq f(c)$ puisque $f(x)$ et $f(c)$ sont observables. On vient donc de montrer que la propriété '$f(x) \leq f(c)$ pour $x \in [a; b]$' est vraie pour x dans le niveau de référence. Par clôture, c'est donc vrai pour tous les x dans $[a; b]$. On en conclut que f atteint son maximum en c. □

Il ressort de la preuve que le maximum est atteint pour un c observable. C'est, à nouveau, purement une conséquence de la clôture. Si le maximum et le minimum sont atteints, ils doivent l'être (aussi) pour des valeurs observables.

En utilisant les deux théorèmes précédents, on voit que l'image d'un intervalle fermé borné $[a; b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné.

Nous allons maintenant aborder la continuité uniforme. Avant d'introduire la définition, rappelons que la continuité d'une fonction en un point se fait avec un niveau de résolution qui est déterminé par le point que l'on étudie: pour chaque x, il faut prendre dx ultrapetit par rapport à f et à x (c'est la raison pour laquelle on travaillait avec le voisin dans les théorèmes précédents, puisque dx était préalablement choisi). Pour la continuité uniforme sur un intervalle I, le niveau de référence ne dépend pas du point particulier, seulement de f et de I.

Définition 16
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Le niveau de référence contient f et I. On dit que f est ***uniformément continue*** *si pour chaque $x, y \in I$ avec $x \simeq y$ alors $f(x) \simeq f(y)$.*

Si I est borné, alors le niveau de référence contient les bornes. Si $I = \mathrm{Dom}(f)$ alors le niveau de référence est celui de f, et de même, on prendra le niveau de f et de a si I est de la forme $[a; \infty[$.

Théorème 20
Si f est continue sur $[a; b]$ alors f est uniformément continue sur $[a; b]$.

Preuve: Le niveau de référence contient a, b et f. Soient x et y tels que $a \leq x, y \leq b$ et $x \simeq y$. Soit c le voisin de x (ce voisin existe puisque x est borné par a et b). Alors le voisin c est dans $[a; b]$. Par définition, $x \simeq c$. Mais on a aussi $c \simeq y$, puisque $x \simeq y$. Par continuité de f en c on a que

$$f(x) \simeq f(c) \quad \text{et aussi} \quad f(y) \simeq f(c).$$

On a donc bien $f(x) \simeq f(y)$. □

L'argument précédent ne marche pas pour la fonction $f : x \mapsto 1/x$ sur l'intervalle $]0, 1]$ par exemple: Pour $x > 0$, avec $x \simeq 0$, le voisin de x est 0. En fait, la fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas uniformément continue sur $]0; 1]$.

On a montré que les fonctions continues sur un intervalle fermé borné sont uniformément continues. La réciproque est vraie sur n'importe quel intervalle.

Théorème 21
Soit f une fonction uniformément continue sur un intervalle I. Alors f est continue sur I.

Preuve: Soient a, b les bornes de l'intervalle (si elles existent). Le niveau de référence contient a, b et f. Par définition, pour chaque $x, y \in I$ tels que $x \simeq y$ (par rapport au niveau de référence) on a que $f(y) \simeq f(x)$. Or, par stabilité, cette propriété est vraie par rapport à tous les niveaux de résolution plus fins.

On affine le niveau de référence an ajoutant la référence à x. On notera $\overset{+}{\simeq}$ la relation d'ultraproximité relativement à ce niveau plus fin.

$x \simeq y \Rightarrow f(x) \simeq f(y)$ implique par stabilité $x \overset{+}{\simeq} y \Rightarrow f(x) \overset{+}{\simeq} f(y)$ Donc f est continue en x. □

Exercice 14 (solution page 51)
Montrer que les fonctions suivantes sont continues mais pas uniformément continues sur l'intervalle donné.

(1) $f : x \mapsto 1/x$ sur $]0; 1]$.

(2) $g : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Dans cette partie nous démontrons d'abord les théorèmes qui forment la colonne vertébrale du calcul différentiel (Rolle, accroissements finis, Cauchy) et leurs applications sur la croissance et la concavité des fonctions. On démontre aussi le(s) théorème(s) de L'Hospital pour la forme $0/0$ (la forme ∞/∞ est laissée en annexe). On introduit également les fonctions lisses. Enfin, on démontre la formule pour la dérivée de la réciproque et les fonctions circulaires.

Théorème 22 (La dérivée en un maximum et un minimum)
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a;b[$ et dérivable au point $c \in]a;b[$. Si $f(c)$ est un maximum (ou un minimum) alors $f'(c) = 0$.

Preuve: Nous considérons le cas d'un maximum. Le cas d'un minimum s'en déduit immédiatement en considérant $-f$. Le niveau de référence contient a, b, c et f. Soit dx ultrapetit positif. Alors $f(c+dx) \leq f(c)$, donc

$$f'(c) \simeq \frac{f(c+dx) - f(c)}{dx} \geq 0, \qquad \text{si } dx \text{ est positif.}$$

Et de même

$$f'(c) \simeq \frac{f(c+dx) - f(c)}{dx} \leq 0, \qquad \text{si } dx \text{ est négatif.}$$

Comme $f'(c)$ est dans le niveau de référence, la seule possibilité est $f'(c) = 0$. □

Théorème 23 (Rolle)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

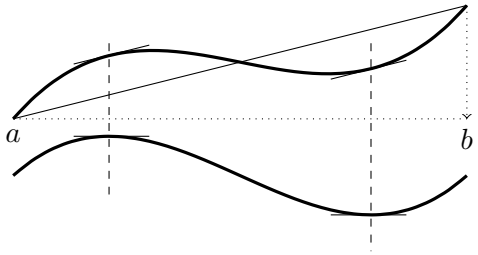
Preuve: Comme f est continue sur l'intervalle $[a;b]$, alors f atteint son maximum et son minimum sur $[a;b]$ par le théorème 19. Ou bien a et b sont à la fois maximum et minimum, ce qui montre que la fonction est constante sur $[a;b]$ (car $f(a) = f(b)$), auquel cas $f'(c) = 0$ pour n'importe quel $c \in]a;b[$ par le théorème 1. Ou bien le maximum ou le minimum est atteint pour $f(c)$ avec $c \in]a;b[$ et on conclut que $f'(c) = 0$ par le théorème précédent. □

Ce théorème et le suivant utilisent des propriétés des fonctions dérivables mais ne fait pas référence aux ultrapetits. Ces théorèmes sont mentionnés ici afin que le cheminement soit complet.

Théorème 24 (Théorème des accroissements finis)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Preuve: On considère la fonction g obtenue en soustrayant à f la droite joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



L'équation de cette droite est

$$x \mapsto f(a) + (x-a) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

On définit donc

$$x \mapsto g(x) = f(x) - f(a) - (x-a) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Alors g est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et on a que

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

De plus, $g(a) = g(b) = 0$, de sorte que par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a;b[$ avec $g'(c) = 0$. On en déduit que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Théorème 25 (Cauchy)
Soient f et g des fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$(f(b)-f(a)) \cdot g'(c) = (g(b)-g(a)) \cdot f'(c).$$

Si $g(b) \neq g(a)$ et $g'(c) \neq 0$, on peut alors écrire

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Preuve: Soit h la fonction définie sur $[a;b]$ par

$$x \mapsto h(x) = (g(b)-g(a)) \cdot f(x) - (f(b)-f(a)) \cdot g(x).$$

Alors h est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et on a $h(a) = f(a) \cdot g(b) - g(a) \cdot f(b) = h(b)$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a;b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire que

$$(f(b)-f(a)) \cdot g'(c) - (g(b)-g(a)) \cdot f'(c) = 0,$$

dont la conclusion découle immédiatement. □

Par clôture, on peut toujours trouver le point c dans le niveau de f, g, a et b dans les trois théorèmes précédents.

Nous démontrons maintenant deux théorèmes collectivement connus sous le nom de règle de L'Hospital, qui se révèlent très utiles pour évaluer certaines limites indéterminées de la forme $\frac{0}{0}$. La forme $\frac{\infty}{\infty}$ est laissée en annexe. Commençons par la forme simple.

Théorème 26 (Règle de l'Hospital pour $0/0$ – forme simple)
Soient f et g des fonctions dérivables au point a. Supposons que $f(a) = g(a) = 0$, mais que $g'(a) \neq 0$. Alors

$$\frac{f(a+dx)}{g(a+dx)} \simeq \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Preuve: Le niveau de référence contient a, f et g. Soit $x \simeq a$ avec $x \neq a$. Alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \simeq \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

□

On peut étendre ce théorème au cas où f et g ne sont pas forcément définies au point a. La preuve est une modification de la preuve précédente, où on appliquera Cauchy à l'intervalle $[y, x]$, avec y choisi tel que $a \simeq y$ par rapport à x et au niveau de a,f et g. Ce qui est nouveau ici est qu'on travaille avec deux niveaux de proximité. On utilise "$\simeq$" pour indiquer une ultraproximité relativement au niveau de référence de départ, et "$\overset{+}{\simeq}$" pour indiquer une relation d'ultraproximité relativement au niveau plus fin – qui sera précisé explicitement.

Théorème 27 (Règle de l'Hospital $0/0$ – forme générale)
Soient f et g des fonctions dérivables sur voisinage de a (mais pas nécessairement en a). Supposons que $x \simeq a \Rightarrow f(x) \simeq 0 \simeq g(x) = 0$ et que $\frac{f'(x)}{g'(x)} \simeq L$ est observable. Alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} \simeq L.$$

Preuve: Le niveau de référence contient a, f et g. Soit $x \simeq a$ avec $x \neq a$. On suppose que $x > a$ (la preuve est similaire pour $x < a$). Il faut montrer que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \simeq L.$$

Soit y arbitraire tel que $a < y < x$. Les hypothèses du théorème de Cauchy sont vérifiées sur $[y; x]$ donc il existe $c \in]y; x[$ tel que

$$(f(x) - f(y))g'(c) = (g(x) - g(y))f'(c).$$

Comme $\frac{f'(x)}{g'(x)} \simeq L$ et $c \simeq a$ on a que $\frac{f'(c)}{g'(c)} \simeq L$, de sorte que $g'(c) \neq 0$, d'où il découle que $g(x) - g(y) \neq 0$. On peut ainsi écrire

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \simeq L.$$

Si y est tel que $a < y < x$ alors nécessairement $y \simeq a$. On choisit maintenant y tel que $y \simeq a$ par rapport à x également. Soit donc $y \overset{+}{\simeq} a$ par rapport au niveau plus fin contenant x, avec $a < y < x$. Puisque $x \simeq a \Rightarrow f(x) \simeq 0$, on a que $f(y) \overset{+}{\simeq} 0$ aussi (par stabilité). Il s'ensuit que

$$f(x) \overset{+}{\simeq} f(x) - f(y).$$

On montre de la même manière que

$$g(x) \overset{+}{\simeq} g(x) - g(y).$$

Comme $f(x), g(x)$ sont dans le niveau plus fin par clôture, on peut appliquer la règle 2 dans ce niveau et obtenir que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{+}{\simeq} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}$$

Comme le niveau de départ est moins fin, on en déduit que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \simeq \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}$$

On voit alors que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \simeq \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \simeq L$$

□

Nous montrons maintenant un outil très utile, qui se déduit immédiatement de la définition de la dérivée.

⚠ Cette équation peut être utilisée plus tôt mais dans l'enseignement, nous avons observé qu'elle pose plus de difficultés aux élèves que la manipulation de la définition de la dérivée. Elle a déjà été mentionnée ici.

Théorème 28 (L'équation de l'incrément)
Soit f une fonction réelle dérivable au point x. Alors

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x) \cdot dx + \varepsilon \cdot dx,$$

où dx est ultrapetit et $\varepsilon \simeq 0$.

Preuve: Si $f'(x)$ existe, alors pour chaque dx ultrapetit, on a

$$\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = f'(x) + \varepsilon, \quad \text{où } \varepsilon \simeq 0.$$

En multipliant par dx et additionnant $f(x)$, on obtient la conclusion. □

Notons que la réciproque est vraie, ce que l'on va utiliser fréquemment:

Théorème 29 (L'équation de l'incrément, réciproque)
Soit f une fonction réelle définie autour d'un nombre réel x. Supposons qu'il existe un nombre L observable tel que, pour chaque dx ultrapetit, on a

$$f(x + dx) = f(x) + L \cdot dx + \varepsilon \cdot dx,$$

pour un $\varepsilon \simeq 0$. Alors f est dérivable en x et $f'(x) = L$.

Preuve: C'est à nouveau la définition de la dérivée: L'hypothèse implique que, pour chaque dx ultrapetit, on a

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \simeq L.$$

Par définition, cela veut dire que f est dérivable en x et on a que $L = f'(x)$. □

Lorsque nous utiliserons l'un ou l'autre de ces théorèmes, nous dirons simplement 'par l'équation de l'incrément'.

On peut montrer la ces simple de la règle de l'Hospital: si $f(a) = g(a) = 0$ et si si $g'(a) \neq 0$ alors

$$\frac{f(a+dx)}{g(a+dx)} = \frac{f(a)+f'(a)dx+\varepsilon dx}{g(a)+g'(a)dx+\delta dx} = \frac{f'(a)+\varepsilon}{g'(a)+\delta} \simeq \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Nous abordons maintenant la dérivée de la fonction réciproque.

Théorème 30 (Dérivée de la réciproque)
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ et bijective. Si f est dérivable en $x \in]a;b[$ avec $f'(x) \neq 0$, alors ${}^r f$ est dérivable en $y = f(x)$ et

$$({}^r f(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'({}^r f(y))}.$$

Preuve: Le niveau de référence est celui de a, b, f et x. Donc le niveau de référence contient ${}^r f$ et y.

Soit dy ultrapetit. Appelons dx la quantité ${}^r f(y+dy) - {}^r f(y)$. Par continuité de ${}^r f$ (théorème 11) on a que $dx \simeq 0$. Comme f est dérivable en x, on a par l'équation de l'incrément que

$$f(x+dx) - f(x) = (f'(x)+\varepsilon)\cdot dx,$$

où $\varepsilon \simeq 0$. Mais par définition de dx on a que $dy = f(x+dx)-f(x)$ donc en récrivant l'équation ci-dessus on obtient:

$$dy = (f'(x)+\varepsilon)\cdot({}^r f(y+dy) - {}^r f(y)).$$

Comme $f'(x)$ est dans le niveau de référence et $f'(x) \neq 0$, on a que $f'(x)+\varepsilon \neq 0$. On en déduit que

$$\frac{1}{f'(x)+\varepsilon} = \frac{{}^r f(y+dy) - {}^r f(y)}{dy}.$$

Mais $\dfrac{1}{f'(x)+\varepsilon} \simeq \dfrac{1}{f'(x)}$ qui est dans le niveau de référence. Ainsi, $({}^r f(y))'$ existe et on a

$$({}^r f(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'({}^r f(y))}.$$

□

Croissance et concavité

Nous déduisons maintenant un théorème liant la croissance d'une fonction et sa dérivée.

Définition 17
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

*(1) On dit que f est **(strictement) croissante sur** I si $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$), pour chaque $x < y$ dans I.*

*(2) On dit que f est **(strictement) décroissante sur** I si $f(x) \geq f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$), pour chaque $x < y$ dans I.*

Théorème 31 (Croissance et dérivée première)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors

(1) Si $f'(x) \geq 0$ (> 0) pour chaque $x \in I$ alors f est (resp. strictement) croissante sur I.

(2) Si $f'(x) \leq 0$ (< 0) pour chaque $x \in I$ alors f est (resp. strictement) décroissante sur I.

(3) Si $f'(x) = 0$ sur I alors f est constante sur I.

Preuve: Soient $x < y$ avec $x, y \in I$. Alors f est continue sur $[x; y]$ et dérivable sur $]x; y[$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x; y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x).$$

Comme $y - x > 0$ on a que $f(y) - f(x)$ a le même signe que $f'(c)$. Si $f'(c) > 0$, $f(y) > f(x)$, si $f'(c) = 0$ alors $f(y) = f(x)$ et si $f'(c) < 0$ on a que $f(y) < f(x)$. On en déduit les points (1), (2) et (3) immédiatement. □

Nous démontrons maintenant le lien entre la concavité et la dérivée seconde. La dérivée seconde de f est simplement la dérivée de la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$. On écrit $f''(x) = (f'(x))'$ et on dit que f est deux fois dérivable sur un intervalle si $f''(x)$ existe pour tous les x sur cet intervalle.

Définition 18
*Soit f dérivable sur un intervalle I. On dit que f est **convexe sur** I si pour chaque $x, y \in I$, $f(y)$ se trouve au dessus de la tangente de f en $(x, f(x))$, c'est-à-dire:*

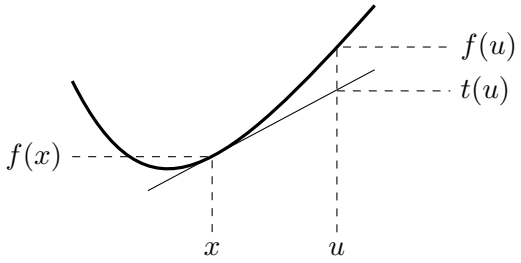
$$f(y) \geq f'(x)(y - x) + f(x).$$

*On dit que f est **concave sur** I si $-f$ est convexe.*

Théorème 32 (Concavité et dérivée seconde)
Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors

(1) Si $f''(x) \geq 0$ pour chaque $x \in I$ alors f est convexe sur I.

(2) Si $f''(x) \leq 0$ pour chaque $x \in I$ alors f est concave sur I.



Preuve: (2) découle de (1) en passant à la fonction $-f$. Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x; y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Or $f'' \geq 0$ sur $[a; b]$ donc f' est croissante sur $[a; b]$ par le théorème précédent. On en déduit que $f'(c) \geq f'(x)$, de sorte que

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x).$$

La convexité de f en découle immédiatement. □

Définition 19
*On dit que la fonction f est **lisse sur l'intervalle** $[a; b]$ si $f'(x)$ existe pour chaque $x \in [a; b]$ et que $x \mapsto f'(x)$ est continue sur $[a; b]$.*

Si une fonction est lisse, sa pente varie de manière continue et la fonction apparaîtra donc comme une droite au microscope. Les fonctions deux fois dérivables sont lisses par le théorème 8. Les fonctions lisses $(\mathcal{C}_1)$ sont exactement les fonctions qui satisfont une forme plus forte de l'équation de l'incrément:

Théorème 33
Soit f une fonction et $[a; b]$ un intervalle. Alors pour dx ultrapetit et pour tous les $x \in [a; b]$ il existe $\varepsilon \simeq 0$ tel que

$$f(x + dx) - f(x) = f'(x) \cdot dx + \varepsilon \cdot dx.$$

Preuve: Par le théorème des accroissements finis, on a que

$$f(x + dx) - f(x) = f'(c) \cdot dx,$$

pour un c entre x et $x + dx$. Comme f' est continue sur $[a; b]$, elle est uniformément continue, donc on a que

$$f'(c) = f'(x) + \varepsilon,$$

où $\varepsilon \simeq 0$. On en déduit que

$$f(x + dx) - f(x) = f'(x) \cdot dx + \varepsilon \cdot dx.$$

□

La propriété 'f est lisse sur $[a; b]$' est une propriété de f et de $[a; b]$ et c'est donc par rapport au niveau de f et de $[a; b]$ que l'on travaille. En particulier, et c'est là le point le plus important, la quantité dx n'est pas nécessairement ultrapetite par rapport à x.

Le théorème précédent nous permet d'introduire un outil important, qui a déjà été mentionné: la différentielle.

Définition 20
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$. On définit la ***différentielle de f en*** *x, notée $df(x)$, comme*

$$df(x) = f'(x) \cdot dx.$$

On a donc par définition que $\frac{df}{dx} = f'(x)$, ou encore $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ si on note $y = f$. Ces quantités sont de véritables quotients.

On utilisera souvent la différentielle pour simplifier le formalisme. Par exemple, si f est une fonction bijective, alors sa réciproque ${}^{r}f$ aussi et en écrivant $f(x) = y(x)$ et $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ on a

$$({}^{r}f(y))' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Chapitre VII
La limite

⚠ Le concept de limite n'est pas absolument nécessaire pour pratiquer l'analyse avec ultrapetits. Néanmoins il est utile de définir la limite dans ce contexte pour plusieurs raisons. Dans le cadre de l'enseignement, la notion de limite est au plan d'études, il ne faut donc pas l'ignorer. Par ailleurs, par la suite, certains élèves verront un enseignement basé sur le concept de limite. Ils doivent donc pouvoir transposer. L'écriture de la limite est un condensé qui a aussi des avantages. Par ailleurs, en annexe nous donnons une preuve que la définition de limite classique et celle que nous donnons ici sont équivalentes, ce qui permet de constater que l'analyse avec ultrapetits est bien "la même" analyse par d'autres moyens.

La notion de limite est une propriété de f autour d'un point a. Pour pouvoir considérer $f(x)$ pour x proche de a il faut que f soit définie autour de a, mais pas nécessairement en a, c'est-à-dire au moins sur un ouvert de la forme $]b, a[\cup]a, c[$, où $b < a < c$. On appellera voisinage de a un tel ensemble. Il est inclus dans le domaine de f et fait donc partie du niveau de référence de f.

La continuité ayant été étudiée ici sans utiliser le concept de limite, on peut, sans circularité, définir la limite en termes de continuité.

Exercice 15 (solution en page 52)

Soit la fonction f en $x = a$. On suppose f définie autour du point a mais pas nécessairement en a. On définit la limite de f en a comme la valeur que devrait prendre f pour être continue en a.

(1) Selon cette définition, quelle est le niveau de la limite?

(2) Donner une définition de la limite.

La propriété que nous venons de définir est une propriété de f au point a. Le niveau de référence est donc celui qui contient f et a et c'est par rapport à ce niveau qu'il faut interpréter le symbole $\simeq$.

Exemple

Considérons la détermination de la limite de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3}, \qquad \textit{avec } Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\},$$

au point $a = 3$. La fonction f est bien définie dans un voisinage de 3. Le niveau de f et de a est le niveau le plus grossier. On choisit donc $x \simeq 3$ ($x \neq 3$). On écrit $x = 3 + dx$, où dx est ultrapetit par rapport à 0. Mais alors

$$f(x) = \frac{2(3+dx)^2 - 7(3+dx) + 3}{(3+dx) - 3} = \frac{5dx + dx^2}{dx} = 5 + dx \simeq 5.$$

Comme 5 ne dépend pas de dx et est ultraproche de $f(x)$, c'est donc la limite.

⚠ Le résultat classique reste vrai: à savoir que la fonction n'est pas définie en $x = 3$. L'approche avec ultrapetits ne change pas ce fait.

Observons que, dans l'exemple précédent, la limite est unique. Pour cette même limite, supposons qu'on ait choisi x encore plus proche de 3, par exemple $x = 3+\varepsilon$, où ε est lui-même ultrapetit par rapport à dx. On a de la même manière:

$$f(x) = \frac{2(3+\varepsilon)^2 - 7(3+\varepsilon) + 3}{(3+\varepsilon) - 3} = 5 + \varepsilon,$$

donc la différence de $f(x)$ avec la limite 5 est ε, c'est-à-dire qu'elle est non seulement ultrapetite par rapport au niveau le plus grossier (ce que demande la définition) mais en plus ultrapetite par rapport à dx! C'est une propriété tout à fait générale: par stabilité, la propriété

$$x \simeq a \ (x \neq a) \quad \text{implique} \quad f(x) \simeq L$$

est vraie par rapport au niveau de référence si et seulement si elle est vraie par rapport à tous les niveaux plus fins.

Il n'est donc pas nécessaire de s'occuper du niveau dans lequel on travaille tant qu'on travaille dans un niveau suffisamment fin. Ce thème se retrouve partout.

Théorème 34
Si la limite de f en a existe alors elle est unique.

Preuve: Supposons qu'il existe L_1 et L_2 observable tels que

$$f(x) \simeq L_1 \quad \text{et} \quad f(x) \simeq L_2$$

pour chaque $x \simeq a \ (x \neq a)$.

Mais alors

$$L_1 \simeq L_2 \quad \text{et sont toutes deux observables.}$$

Par la règle 2, $L_1 = L_2$ □

On voit aussi que, si la limite existe, c'est le voisin de $f(x)$ dans le niveau de f et a, lorsque x est ultraproche de a.

Nous écrirons

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si la limite de f en a est L. Relevons qu'il n'y a pas d'ambigüité sur le niveau de référence, puisque L est dans le niveau de f et a.

Comme le niveau de référence n'est pas important dès lors qu'il est suffisamment fin, on peut combiner les limites comme on a combiné les dérivées. Par exemple, supposons que f et g sont des fonctions réelles définies sur un voisinage de a. Supposons, de plus, que la limite de f en a et la limite de g en a existent. Alors

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

En effet, supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ et $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$. Le niveau de référence contient a, f et g. Alors L_1, L_2 et donc $L_1 + L_2$ sont dans le niveau de référence. Par stabilité $f(x) \simeq L_1$ et $g(x) \simeq L_2$ si $x \simeq a \ (x \neq a)$ par rapport au niveau de référence. On a donc par la règle 2

$$f(x) + g(x) \simeq L_1 + L_2.$$

C'est ce qu'on voulait démontrer.

⚠ On remarque que l'introduction de la notion de limite introduit presque toujours une période d'instabilité en classe. Les difficultés classiques du concept ressurgissent. Néanmoins, le formalisme étant en place, on peut insister sur le fait qu'ici, la limite n'est qu'une écriture.

La difficulté qu'expriment les élèves vient de l'apparition du signe "=" là où il n'y avait qu'un signe "$\simeq$". On peut pratiquer de remplacer toute expression avec limite par sa définition.

Nous définissons maintenant les limites à gauche et à droite.

Définition 21

(1) Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert de la forme $]b, a[$. On dit que ***la limite de f à gauche de a existe*** *s'il existe L du niveau de référence tel que*

$$f(x) \simeq L \quad \textit{pour chaque } x \simeq a \textit{ avec } x < a.$$

(2) Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert de la forme $]a, c[$. On dit que ***la limite de f à droite de a existe*** *s'il existe L du niveau de référence tel que*

$$f(x) \simeq L \quad \textit{pour chaque } x \simeq a \textit{ avec } x > a.$$

Comme précédemment, si la limite de f à gauche de a ou à droite de a existe, cette limite est unique et se trouve dans le niveau de f et a. De même, on peut travailler dans n'importe quel niveau plus fin.

On écrira

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

lorsque la limite à gauche de a est égale à L et

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

lorsque la limite à droite de a est égale à L. Le niveau de référence est toujours celui de f et de a.

Le fait que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si et seulement si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

est immédiat dans ce contexte et nous le laissons en exercice.

On s'inspirera de la notation classique pour introduire

$$x \simeq a^- \text{ pour } x \simeq a \text{ et } x < a.$$

Nous étendons maintenant cette notion dans certains cas où un tel L n'existe pas parce que la fonction f n'est pas bornée autour de a. Nous utilisons le symbole ∞:

Définition 22

Soient a un nombre réel et f une fonction réelle définie sur un voisinage a. On dira que

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

si $f(x)$ est un ultragrand positif pour chaque $x \simeq a$ $(x \neq a)$. Et on dira que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

si $f(x)$ est un ultragrand négatif pour chaque $x \simeq a$ $(x \neq a)$.

⚠ On peut utiliser $f(x) \simeq +\infty$ pour indiquer que si $f(x)$ est ultragrand relativement à f et à a, on faisant bien attention à ne pas laisser croire que ∞ est *un* nombre ultragrand bien déterminé. On peut l'expliquer et spécifiant que si x est suffisamment proche de a alors $f(x)$ **déborde** dans les ultragrands. Le signe "$\simeq$" indique "relativement au niveau de référence" mais bien sûr pas une ultraproximité.

La définition $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ peut ainsi se donner par $x \simeq a \Rightarrow f(x) \simeq \infty$.

Le niveau de référence est celui de f et de a, donc $f(x)$ est ultragrand par rapport à ce niveau de référence si $x \simeq a$ par rapport à ce niveau de référence. Par stabilité, on peut également travailler par rapport à un niveau plus fin.

⚠ Avec ces définitions, c'est un exercice simple de voir que les définitions de dérivée et de continuité avec ultrapetits ou avec limites (définies avec ultrapetits) coïncident. Une annexe montre qu'elles coïncident aussi avec la définition classique en ε-δ.

C'est un bon exercice de demander aux élèves de faire ces reformulations. Ainsi elles correspondront à celles qu'ils trouveront dans les formulaires.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1, page 12

Fixons un niveau de référence.

(1) Soit ε ultrapetit (disons positif). Soit a positif et observable.

(On rappelle que "observable" signifie "dans le niveau de référence")

Comme ε est ultrapetit, on a $\varepsilon < \frac{1}{a}$, puisque, par clôture, $\frac{1}{a}$ est observable. On a donc que $\frac{1}{\varepsilon} > a$. Comme a était arbitraire, on a que $\frac{1}{\varepsilon}$ est ultragrand.

(2) Soit M ultragrand (disons positif). Soit a positif et observable. Par clôture $\frac{1}{a}$ est observable, donc $M > \frac{1}{a}$, de sorte que $\frac{1}{M} < a$. Comme a était arbitraire, on a que $\frac{1}{M}$ est ultrapetit.

Solution de l'exercice 2, page 13

(1) Soit ε ultrapetit, et $\delta = \varepsilon^2$ (donc aussi ultrapetit). Alors $\dfrac{\varepsilon}{\delta} = \dfrac{1}{\varepsilon}$ est ultragrand.

(2) Soit δ ultrapetit et $\varepsilon = \delta^2$ on a $\dfrac{\varepsilon}{\delta} = \delta$ est ultrapetit.

(3) En prenant $\varepsilon = \delta$ ultrapetit on a $\dfrac{\varepsilon}{\delta} = 1$ n'est pas ultragrand (non ultrapetit).

(4) Par la règle 2 tous les contre-exemples sont ultragrands. Soit $x = N$ ultragrand et $y = N + \dfrac{1}{N}$. Alors $x \simeq y$ mais

$$x^2 = N^2 \not\simeq N^2 + 2 + \frac{1}{N^2} = y^2$$

puisque 2 n'est pas ultrapetit.

(5) Par la règle 2, tous les contre-exemples sont soit ultragrands, soit ultrapetits. Soit $x = \varepsilon$ et $y = \varepsilon^2$. Alors $x \simeq y$, mais $\frac{1}{x} \not\simeq \frac{1}{y}$, puisque leur différence est ultragrande.

Solution de l'exercice 3, page 14

Les termes ultrapetits et ultragrands sont par rapport à un niveau de référence donné.

(1) Comme $\frac{1}{\varepsilon}$ est ultragrand on a que $1 + \frac{1}{\varepsilon}$ est ultragrand.

(2) On a que $\frac{\sqrt{\delta}}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$. Or, $\sqrt{\delta}$ est ultrapetit (si $\delta < c$ pour chaque c positif dans le niveau de référence, alors $\sqrt{\delta} < \sqrt{c}$ et donc $\sqrt{\delta} \simeq 0$). Donc $1/\sqrt{\delta}$ est ultragrand.

(3) C'est peut-être une surprise, mais ce nombre est ultrapetit. Pour le voir, on multiplie et on divise par le conjugué:

$$\begin{aligned}
\sqrt{H+1} - \sqrt{H-1} &= \frac{(\sqrt{H+1} - \sqrt{H-1})(\sqrt{H+1} + \sqrt{H-1})}{\sqrt{H+1} + \sqrt{H-1}} \\
&= \frac{(H+1) - (H-1)}{\sqrt{H+1} + \sqrt{H-1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{H+1} + \sqrt{H-1}}.
\end{aligned}$$

Mais H est positif ultragrand, donc $H+1$ et $H-1$ sont positifs ultragrands, tout comme leur racine carrée (si la racine était dans un niveau plus grossier, son carré aussi par clôture, donc ces nombres ne seraient pas ultragrands). La somme de deux positifs ultragrands étant ultragrande, le quotient doit être ultrapetit.

(4) $\dfrac{H+K}{HK} = \dfrac{1}{K} + \dfrac{1}{H}$ est ultrapetit.

(5) $\dfrac{5+\varepsilon}{7+\delta} - \dfrac{5}{7} = \dfrac{35+7\varepsilon-35-5\delta}{49+7\delta} = \dfrac{\overbrace{7\varepsilon-5\delta}^{\simeq 0}}{\underbrace{49+7\delta}_{\simeq 49}}$ est ultrapetit (ou nul).

(6) $\dfrac{\overbrace{\sqrt{1+\varepsilon}-2}^{\simeq -1}}{\underbrace{\sqrt{1+\delta}}_{\simeq 1}} \simeq -1$, donc n'est pas ultragrand non ultrapetit.

Solution de l'exercice 4, page 14

Notons une propriété de x par $P(x)$. Cette propriété est supposé satisfaire la notation contextuelle, donc réfère soit au niveau de référence soit ne mentionne pas de niveaux. Si $\exists x\ P(x)$ alors un tel x est dans un niveau (qui peut être plus fin que celui de P). Donc il existe un x dans le niveau de P et x satisfaisant $P(x)$.

Dans cette formule, le x est lié par $\exists$, il ne sert donc pas à déterminer le niveau de référence qui reste celui de P. Par stabilité, l'affirmation doit rester vrai si on remplace la référence au niveau plus fin par le niveau de référence. On obtient donc qu'il existe un x du niveau de P tel que $P(x)$ est vrai.

Solution de l'exercice 5, page 16

Soit $f : x \mapsto ax+b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Soit x donné. On travaille par rapport au niveau de référence contenant a, b et x. Soit dx ultrapetit, on a

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{(a\cdot(x+dx)+b)-(ax+b)}{dx} = \frac{a\cdot dx}{dx} = a.$$

Mais a est dans le niveau de référence donc $f'(x) = a$. Ce résultat est indépendant de x donc la pente de f est a.

Solution de l'exercice 6, page 16

Soit $f : x^3 - x^2$. Pour calculer $f'(2)$ on choisit dx ultrapetit. On a

$$\begin{aligned} f'(2) &\simeq \frac{(2+dx)^3-(2+dx)^2-(2^3-2^2)}{dx} \\ &= 12+6dx+dx^2-4-dx = 8+5dx+dx^2. \end{aligned}$$

Comme $f'(2) \simeq 8$ et 8 est observable et indépendant de dx, on a que $f'(2) = 8$.

Pour calculer $f'(3+h)$ on doit travailler par rapport à au niveau de $3+h$. Soit dx ultrapetit. Alors

$$\begin{aligned} f'(3+h) &\simeq \frac{(3+h+dx)^3-(3+h+dx)^2-(3+h)^3+(3+h)^2}{dx} \\ &= 3h^2+16h+21+8dx+3h^2+dx^2 \simeq 21+16h+3h^2. \end{aligned}$$

Comme $21+16h+3h^2$ est observable, c'est donc la dérivée. On aurait pu calculer $f'(x) = 3x^2-2x$ directement et voir que la dérivée est égale à $3x^2-2x\Big|_{x=3+h}$.

Solution de l'exercice 7, page 20

Soit h ultrapetit par rapport au niveau le plus grossier. On considère la fonction

$$H : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq -h \\ \dfrac{1}{h}\left(x + \dfrac{h}{2}\right) & \text{if } -h < x < h \\ 1 & \text{if } x \geq h. \end{cases}$$

Son niveau de référence est celui de h.

On a que $H'(x) = 0$ pour $x < -h$ et $x > h$ puisque H est constante sur les intervalles $x \leq -h$ et $x \geq h$.

Pour évaluer $H'(x)$ pour x entre $-h$ et h, on prend un incrément dx ultrapetit par rapport à x et H. On a

$$H(x + dx) - H(x) = \frac{1}{h}\left(x + dx + \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{h}(x + \frac{h}{2}) = \frac{1}{h} \cdot dx$$

d'où $H'(x) = \frac{1}{h}$ (qui est ultragrand par rapport au niveau le plus grossier).

Cette fonction n'est pas dérivable en $x = h$ ou $x = -h$.

Au niveau de le plus grossier cette fonction est indistinguable de la fonction discontinue, dite de Heaviside:

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ 1/2 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x > 0, \end{cases}$$

qui a pour dérivée (au sens des distributions) la 'fonction' δ de Dirac

$$\delta : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

dont l'intégrale vaut 1. On voit d'ailleurs facilement que l'aire sous la courbe H' est 1.

On peut donc faire facilement dans ce contexte des choses qui nécessitent d'habitude des outils beaucoup plus sophistiqués. Voir l'exercice 9, page 27 pour une autre approximation qui est, en plus, dérivable partout.

Solution de l'exercice 8 (preuve du théorème 9), page 22

Le niveau de référence contient f, g et a. Soit $x \simeq a$. Alors $f(x) \simeq f(a)$ et $g(x) \simeq g(a)$ par stabilité et continuité de f et g en a. Ainsi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \simeq f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

par la règle 2.

Pour le quotient, on suppose, de plus, que $g(a) \neq 0$. Mais alors $g(a) \not\simeq 0$ puisque $g(a)$ et 0 sont dans le niveau de référence. Comme $g(x) \simeq g(a)$ on a aussi que $g(x) \not\simeq 0$. Comme par ailleurs $f(a), g(a)$ ne sont pas ultragrands (puisque dans le niveau de référence) on a:

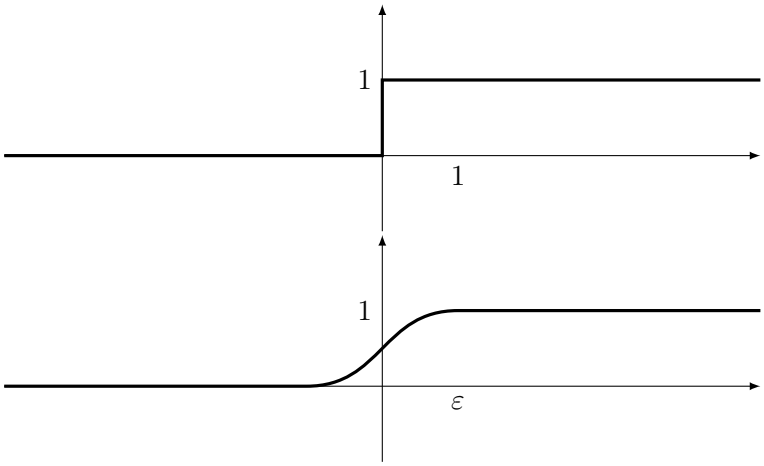
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \simeq \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a).$$

Solution de l'exercice 9, page 27

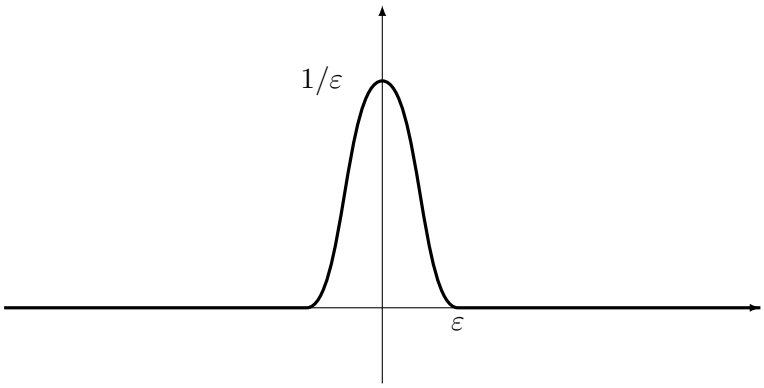
Soit $H : x \mapsto \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} \cdot \arctan\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, où ε est un paramètre ultrapetit par rapport à 0. Le niveau de H est le niveau de ε. Alors

$$H'(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}.$$

Comme ε est ultrapetit par rapport à 0, alors la fonction coïncide avec la fonction de Heaviside sur le niveau le plus grossier. Si l'échelle horizontale est étendue et qu'on laisse inchangée l'échelle verticale, on peut distinguer la courbe.



Du point de vue du niveau le plus grossier, la dérivée $H'(x)$ est une ligne horizontale $y = 0$ et a une valeur ultragrande par rapport à 0.



L'aire sous la courbe est 1.

Solution de l'exercice 10, page 28

(1) On considère $f : x \mapsto \cos(1/x)$, pour $x > 0$. Pour voir que cette fonction ne peut être étendue par continuité en 0, il suffit de voir que la limite de f en 0 n'existe pas. Soit N un entier positif ultragrand. Posons $x_1 = \dfrac{1}{2N\pi}$. Alors x_1 est ultrapetit par rapport à 0 et

$$\cos(1/x_1) = \cos(2N\pi) = 1.$$

En revanche, pour $x_2 = \dfrac{1}{2N\pi + \frac{\pi}{2}}$ aussi ultrapetit on a

$$\cos(1/x_2) = \cos(2N\pi + \frac{\pi}{2}) = 0.$$

La limite de $x \mapsto \cos(1/x)$ en 0 n'existe donc pas.

(2) Pour la deuxième partie, soit $x \neq 0$. Alors

$$g'(x) = (x^2)' \sin(1/x) + x^2(\sin(1/x))' = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Pour $x = 0$, soit dx ultrapetit par rapport à 0. On a

$$g'(0) = \frac{g(dx) - g(0)}{dx} = \frac{dx^2 \sin(1/dx) - 0}{dx} = dx \sin(1/dx) \simeq 0,$$

puisque $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$. On a donc que $g'(0) = 0$. Mais

$$\lim_{x \to 0} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) \quad \text{n'existe pas}$$

par la première partie. En particulier, cette limite ne vaut donc pas 0. Il en découle que la dérivée $x \mapsto g'(x)$ n'est pas continue.

Solution de l'exercice 11, page 31

La propriété 'il existe M et L tels que $f(x) = L$ pour tous les $x \geq M$' ne mentionne pas de niveau. Par clôture, cette propriété doit être vraie quand M et L sont observables. Mais si M est observable alors pour chaque x ultragrand on a $x \geq M$. Donc $f(x) = L$ pour tous les x ultragrands.

Solution de l'exercice 12, page 31

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On a déjà montré que si f est bornée, alors la borne M peut être choisie observable. Mais alors si $|f(x)| \leq M$ cela veut dire que $f(x)$ n'est pas ultragrand. Pour la réciproque, si $f(x)$ n'est pas ultragrand pour tous les $x \in I$, alors $|f(x)| \leq M$ pour n'importe que ultragrand positif M. Un tel M est une borne de f.

Solution de l'exercice 13, page 32 Comme on parle d'une propriété de l'intervalle $[a, b]$, le niveau de référence est donné par les paramètres du problème, soit a et b. Soit x tel que $a \leq x \leq b$. Alors x n'est pas ultragrand puisque borné par a et b qui sont observables. Donc le voisin de x existe, que nous notons c. Si $x \simeq a$ (resp. $x \simeq b$) alors $c = a$ (resp. $c = b$).

Si $x \not\simeq a$, on peut aussi procéder par contradiction: supposons que $c < a < x$ avec c observable et $x \simeq c$. Par clôture, $a - c \not\simeq 0$, mettons $a - c = d > 0$ observable. Donc $c < c + d < x$ donc $c \not\simeq x$.

C'est faux si pour les intervalles ouverts: Soit $x > 0$ ultrapetit. Alors $x \in]0; 1[$ mais le voisin de x est 0 et $0 \notin]0; 1[$.

Solution de l'exercice 14, page 34

Le premier point montre ce qui peut se passer lorsque l'intervalle de définition n'est pas borné et le deuxième lorsque l'intervalle n'est pas fermé.

(a) Le niveau de la fonction $f : x \mapsto x^2$ ($\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$) est le plus grossier. Pour voir que f est continue en x, on prend dx ultrapetit par rapport à celui de f et x qui est le niveau de x et on a

$$f(x + dx) = x^2 + 2xdx + dx^2 \simeq x^2 = f(x).$$

Pour voir que f n'est pas uniformément continue, choisissons dx ultrapetit par rapport au niveau de f. On a d'une part

$$f\left(\frac{1}{dx} + dx\right) = \left(\frac{1}{dx} + dx\right)^2 = \frac{1}{dx^2} + 2 + dx^2.$$

Et on a d'autre part

$$f\left(\frac{1}{dx}\right) = \frac{1}{dx^2}.$$

Pour $x = 1/dx$, on a donc que $f(x + dx) \not\simeq f(x)$, ce qui montre que f n'est pas uniformément continue.

(b) Pour voir que f est continue en chaque point x de son domaine, on prend dx ultrapetit par rapport au niveau de f et de x. Alors

$$\frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2 + x \cdot dx} \simeq 0$$

Pour voir que f n'est pas uniformément continue fixons dx ultrapetit par rapport au niveau de f mais pas de x. Mais alors

$$\frac{1}{dx+dx} - \frac{1}{dx} = \frac{1}{2dx} - \frac{2}{2dx} = \frac{-1}{2dx} \not\simeq 0.$$

Pour $x = dx$ on a donc que $f(x+dx) \not\simeq f(x)$, de sorte que f n'est pas uniformément continue.

Solution de l'exercice 15, page 43

(a) La valeur $f(a)$ serait dans le niveau de f et de a. C'est donc le niveau de la limite.

(b) La définition de la limite en termes d'ultrapetits:

Définition 23
Soient a un nombre réel et f une fonction réelle définie sur un voisinage de a. On dit que la ***limite de f en a existe*** *et s'il existe un nombre réel observable L tel que*

$$f(x) \simeq L \quad \textit{pour chaque } x \simeq a \ (x \neq a).$$

On appelle le nombre L ***la limite de f en a.***