Equations rationnelles
Classeur BS : 1- Arithmétique - Algèbre

1. Equation (BS 9.1 p.36 ; 9.2 p.37 ; 9,3 p.38-40)

Une **équation** est l'égalité de deux expressions littérales appelées les **membres** de l'équation. Les variables qui représentent des nombres indéterminés sont appelées les **inconnues** de l'équation. Le **degré d'une équation** est égal au plus haut degré des deux polynômes qui la constituent.

Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie.

Deux équations sont dites **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.

Résoudre une équation consiste à trouver toutes ses solutions. Pour résoudre une équation, on la transforme en équations équivalentes plus simples jusqu'à l'obtention de la solution.

Pour obtenir des équations équivalentes, on applique des **règles d'équivalences** :
- On peut développer ou réduire chaque membre de l'équation.
- On peut additionner ou soustraire un nombre ou une expression algébrique à chacun des deux membres de l'équation.
- On peut multiplier ou diviser chacun des deux membres d'une équation par un même nombre non nul ou une même expression différente de 0.

Une équation peut admettre : aucune solution ($S=\varnothing$), une solution ($S=\{x_1\}$), plusieurs solutions ($S=\{x_1;x_2...\}$), une infinité de solution ($S=¡$).

Exemples : $6x=12$ *et* $4x+6=12+x$ *sont deux équations équivalentes. Leur ensemble de solutions est l'ensemble constitué du nombre 2 (*$S=\{2\}$*).*

$(x+5)(x-3)=0$ *et* $x^2+2x=15$ *sont deux équations équivalentes. Leur ensemble de solutions est l'ensemble constitué des nombres -5 et 3 (*$S=\{-5;3\}$*).*

$8x=32$ *et* $x^2-16=0$ *ne sont pas deux équations équivalentes. L'ensemble de solutions de l'équation* $8x=32$ *est* $S=\{4\}$ *alors que l'ensemble de solutions de l'équation* $x^2-16=0$ *est* $S=\{-4;4\}$

Exemples :

$\frac{x}{2}+\frac{1}{5}=\frac{x}{2}+1$ $\quad S=\varnothing$

$\frac{2x}{3}-5=\frac{x}{3}+1$ $\quad S=\{18\}$

$\frac{x(x-2)(2x+3)}{2}=0$ $\quad S=\left\{-\frac{3}{2};0;2\right\}$

$\frac{x}{2}=\frac{x^2+x}{2x+2}$ $\quad S=¡\setminus\{-1\}$

Exercice 1 : *Vérifier si un nombre est une solution d'une équation.*

1) Le nombre 3 est-il une solution de l'équation $5x-2=4x+1$? Justifier.

Membre de gauche : $5x-2=5\cdot 3-2=13$
Membre de droite : $4x+1=4\cdot 3+1=13$
Conclusion : Oui 3 est une solution de l'équation.

2) Le nombre -2 est-il une solution de l'équation $x(3x+4)=(2x+5)(x-2)$? Justifier.

Membre de gauche : $x(3x+4)=-2\cdot\left(3\cdot(-2)+4\right)=(-2)\cdot(-2)=4$

Membre de droite : $(2x+5)(x-2)=\left(2\cdot(-2)+5\right)\cdot\left((-2)-2\right)=1\cdot(-4)=-4$

Conclusion : Non -2 n'est pas une solution de l'équation.

Exercice 2 : *Résoudre les équations suivantes.*

1)
$$5(x+3)=3-4(2x-6)$$
$$5x+15=3-8x+24$$
$$13x+15=27$$
$$13x=12$$
$$x=\frac{12}{13}$$
$$S=\left\{\frac{12}{13}\right\}$$

2)
$$-2(2x-4)=6x-(-3+x)$$
$$-4x+8=6x+3-x$$
$$5=9x$$
$$x=\frac{5}{9}$$
$$S=\left\{\frac{5}{9}\right\}$$

3)
$$4x-2+(5x-1)=-3(7-x)$$
$$4x-2+5x-1=-21+3x$$
$$9x-3=3x-21$$
$$6x=-18$$
$$x=-3$$
$$S=\{-3\}$$

$$\frac{x+5}{2}-\frac{2x-7}{5}=2+\frac{3x}{10}$$

$$\frac{5x+25}{10}-\frac{4x-14}{10}=\frac{20}{10}+\frac{3x}{10}$$

4) $(5x+25)-(4x-14)=20+3x$ $\qquad S=\left\{\frac{19}{2}\right\}$

$x+39=20+3x$

$19=2x$

$x=\frac{19}{2}$

Exercice 3 : *Trouver une équation équivalente.*

Trouver une équation équivalente à : $3(x+2)-5x+4=(3x-7)-(5x+2)$

$-2x+10=-2x-9$ est une des nombreuses fractions équivalentes.

Exercice 4 : *Entourer l'équation qui n'est pas équivalente aux autres.*

1) $2x=10$

$4x+5=25$

$4x^2=20x$

$3x=x+10$

2) $2x-3=4$

$2x-1=2$

$x-3=4-x$

$2x=7$

Exercice 5 : *Entourer l'équation équivalente à* $x^2-25=0$

$(x+5)(x-5)=0$

$4x=-20$

$3x=15$

$(x-5)(x-5)=0$

2. Produit

Pour résoudre une équation de degré supérieur à 1, on utilise une série de transformation pour obtenir un **produit nul**.

Pour déterminer les solutions d'un produit nul, on utilise la propriété suivante :
- Si un produit est nul, alors au moins un de ses facteurs est nul.

Exemple : *Résoudre l'équation* $2x(2x+3)=0$

Si un produit est nul alors l'un de ses facteurs au moins est nul. On en déduit que :

$2x=0$ $\quad x=0$ *ou* $2x+3=0$ $\quad x=-\frac{3}{2}$

Les solutions de l'équaion $2x(2x+3)=0$ *sont* $S=\left\{-\frac{3}{2};0\right\}$

Exercice 6 : *Résoudre les équations suivantes.*

1) $2x(x-5)=0$

$x=0$ ou $x-5=0$, $x=5$ $\quad S=\{0;5\}$

2) $(x+2)(2x-1)=0$

$x+2=0$, $x=-2$ ou $2x-1=0$, $x=\frac{1}{2}$ $\quad S=\left\{-2;\frac{1}{2}\right\}$

3) $\frac{2}{3}x(2x-3)\left(x-\frac{1}{4}\right)=0$

$\frac{2}{3}x=0$, $x=0$ ou $2x-3=0$, $x=\frac{3}{2}$ ou $x-\frac{1}{4}=0$, $x=\frac{1}{4}$ $\quad S=\left\{0;\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right\}$

4) $(3x+1)(x-5)=0$

$3x+1=0$ ou $x-5=0$ $S=\left\{-\frac{1}{3};5\right\}$

$x=-\frac{1}{3}$ $x=5$

5) $(3x+7)(4x-8)=0$

$3x+7=0$ ou $4x-8=0$ $S=\left\{-\frac{7}{3};2\right\}$

$x=-\frac{7}{3}$ $x=\frac{8}{4}=2$

6) $5(9x-3)(-5x-13)=0$

$9x-3=0$ ou $-5x-13=0$ $S=\left\{-\frac{13}{5};\frac{1}{3}\right\}$

$x=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ $x=-\frac{13}{5}$

<u>Exercice 7 :</u> *Déterminer une équation dont l'ensemble de solutions est le suivant.*

1) $S=\{-2\}$ Equation :

2) $S=\{-2;2\}$ Equation :

3) $S=\left\{-\frac{1}{2};0;\frac{3}{4}\right\}$ Equation :

4) $S=\varnothing$ Equation :

5) $S=\left\{-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right\}$ Equation :

6) $S=¡$ Equation :

3. Equation du degré supérieur à 1

Pour transformer une équation de degré supérieur à 1 en un produit nul, on modifie l'équation pour qu'un membre de l'équation soit égale à 0 et on factorise l'autre membre.

Pour factoriser une expression littérale, on peut utiliser :
- La mise en évidence
- Les identitées remarquables
- la formule de Viète

Exemple : *Résoudre l'équation* $4x^2 = -6x$

$$4x^2 = -6x$$
$$4x^2 + 6x = 0$$
$$2x(2x+3) = 0$$
$$S = \left\{0; -\frac{3}{2}\right\}$$

Exemple : *Résoudre l'équation* $25x^2 + 20x + 4 = 0$

$$25x^2 + 20x + 4 = 0$$
$$(5x+2)^2 = 0$$
$$(5x+2)(5x+2) = 0$$
$$S = \left\{-\frac{2}{5}\right\}$$

Exemple : *Résoudre l'équation* $2x^2 + 8x - 5 = 0$

$$2x^2 + 8x - 5 = 0$$
$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 64 + 40 = 104 > 0$$
$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{104}}{4}$$
$$x_2 = \frac{-8 - \sqrt{104}}{4}$$
$$S = \left\{\frac{-8 - \sqrt{104}}{4}; \frac{-8 + \sqrt{104}}{4}\right\}$$

Exercice 8 : *Factoriser et résoudre les équations.*

1) $4x^2 - 12x = 0$

$4x \cdot (x-3) = 0$

$4x = 0$ ou $x - 3 = 0$

$x = 0$ $x = 3$

$S = \{0;3\}$

2) $4x^2 + 16 = -16x$

$4x^2 + 16x + 16 = 0$

$(2x+4)^2 = 0$

$(2x+4)(2x+4) = 0$

$2x + 4 = 0$

$x = -2$

$S = \{-2\}$

3) $8x^2 = 4x$

$8x^2 - 4x = 0$

$4x(2x-1) = 0$

$4x = 0$ ou $2x - 1 = 0$

$x = 0$ $x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{0;\frac{1}{2}\right\}$

4) $x^2 - 10x + 16 = 0$

$(x-8)(x-2) = 0$

$x - 8 = 0$ ou $x - 2 = 0$

$x = 8$ $x = 2$

$S = \{2;8\}$

5) $-x^2+6x-9=0$

$-\left(x^2-6x+9\right)=0$

$-(x-3)^2=0$

$-(x-3)(x-3)=0$

$x-3=0$

$x=3$

$S=\{3\}$

6) $2x^2+x=4$

$2x^2+x-4=0$

$X_1=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$ $X_1=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{4}$ $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{33}}{4};\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}\right\}$

7) $5x^2+4x+8=0$

$\Delta=4^2-4\cdot5\cdot8=-144<0$ $S=\varnothing$

8) $x^2-8x+7=(2x-1)^2$

$x^2-8x+7=4x^2-4x+1$

$-3x^2-4x+6=0$

$X_1=\dfrac{4+\sqrt{88}}{-6}$ $X_2=\dfrac{4-\sqrt{88}}{-6}$ $S=\left\{\dfrac{4-\sqrt{88}}{-6};\dfrac{4+\sqrt{88}}{-6}\right\}$

Exercice 9 : *Vrai ou faux ? Justifier.*

1) L'équation $x^2 = (x+1)^2$ n'a pas de solution.

2) L'équation $(x+1)(-3-3x)^2 = 0$ admet une seule solution.

3) L'équation $(x+1)(-3-3x) = 0$ est équivalente à l'équation $3x+1 = x$

Exercice 10 : Vérifier si un nombre est une solution d'une équation.

1) Le nombre $\frac{3}{2}$ est-il une solution de l'équation $x^2 - \frac{3}{2}x + 4 = 2x^2 - 2x - 1$? Justifier.

Membre de gauche : $x^2 - \frac{3}{2}x + 4 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} + 4 = 4$

Membre de droite : $2x^2 - 2x - 1 = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right) - 2\cdot\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

Conclusion : Non $\frac{1}{2}$ n'est pas une solution de l'équation.

2) Le nombre $-\frac{1}{2}$ est-il une solution de l'équation $x^3 + \frac{5}{2}x^2 = \frac{1}{2} + 2x - x^2$? Justifier.

Membre de gauche : $x^3 + \frac{5}{2}x^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Membre de droite : $\frac{1}{2} + 2x - x^2 = \frac{1}{2} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$

Conclusion : Non $-\frac{1}{2}$ n'est pas une solution de l'équation.